# II-266 有限要素分割の最適化手法を用いた水面波動解析

中央大学　学生員　樫山　和男
中央大学　正会員　川原　睦人

## １。はじめに

著者らは、これまで水面波動解析のための新しい数値解法として境界型有限要素法を提案し、その妥当性と有効性について述べてきた。[1),2)] 本報告では、近年注目されている有限要素分割の最適化手法を水面波動問題の境界型有限要素法解析に適用することについて検討を行う。この手法は、有限要素法による離散化によって生じる誤差を評価し、有限要素分割をその誤差が最小になるように自動的に再分割して解析を行う方法であり、Adaptive有限要素法などとも呼ばれている。この手法を適用することにより、誤差の分布状況が把握でき、計算精度もより向上することが期待できる。最適化の方法としては、大きく分けて三通りの方法があるが、ここでは、要素と節点総数は変えずに、有限要素分割が最適化されるように要素の形と節点の位置を変形移動するＲ－法(node relocation method)について検討を行う。まず、最適化手法の理論の展開について述べ、そして水路の自由振動問題に適用した例について報告する。

## ２。有限要素分割の最適化手法 [3)]

基礎方程式とし は、一定水深を仮定した定常波動問題に対する二次元のヘルムホルツ方程式を用いる。

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{1}$$

ここに、$\phi$は速度ポテンシャル、kは波数である。境界条件としては、境界$\Gamma_1$上で速度ポテンシャルが、境界$\Gamma_2$上で速度ポテンシャルの法線方向の微分値が規定される。

いま、それぞれの要素に含まれる誤差をEe, e=1,2,...,Ne、有限要素領域全体での誤差をehとすると、有限要素分割の最適設計問題は、次のように定義できる。

$$\text{Min} \quad e_h \tag{2}$$

そして、ehとEeの関係を∞－ノルムを用い、上式に代入することにより次式を得る。

$$\text{Min} \quad \text{Max} \quad E_e \tag{3}$$

これより、有限要素分割の最適設計問題が、各要素の誤差についてのMin Max 問題として議論できる。そして、(3) 式の最適化のための必要条件として

$$E_e = \text{const.} \quad , \; e = 1,2,\cdots,N_e \tag{4}$$

が簡単に求められる。ここに、Neは要素総数である。

次に、どのようなものを誤差とするかであるが、ここでは、有限要素法による補間誤差をとる。いま、厳密解を$\phi$、有限要素の内挿関数をvh とすると、有限要素法による補間誤差はノルムによって次のように表される。

$$e_i = \| v_h - \phi \| \tag{5}$$

この補間誤差eiは、厳密解と有限要素近似解との誤差である近似誤差に対して上界から押さえることができる。これより、各有限要素における誤差測度Eeを、補間誤差を用いて次のように定義する。

$$E_e = [\int_{\Omega_e} \{(v_h - \phi)_{,i}\}^2 d\Omega]^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

ここに、Ωe は各有限要素である。

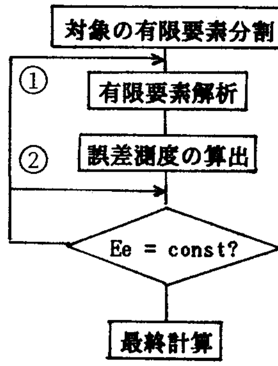
### 3。最適化手法の適用の手順

最適化手法は、一種の反復法であり、(6) 式から得られる誤差測度Eeが (3)式を満足するように、要素と節点の位置を変形移動するものである。図－1に、最適化手法の適用のフローチャートを示す。

節点の移動方法としては、次式を用いる。

$$x_n = \sum_{e=1}^{Mn} (E_e/A_e)x_e \ / \sum_{e=1}^{Mn} (E_e/A_e) \qquad (7)$$

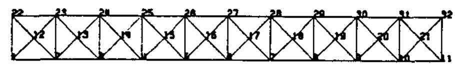
ここに、Mnは節点n に接続する要素の数、Xe, Aeは接続する要素Ωe の重心座標と面積である。



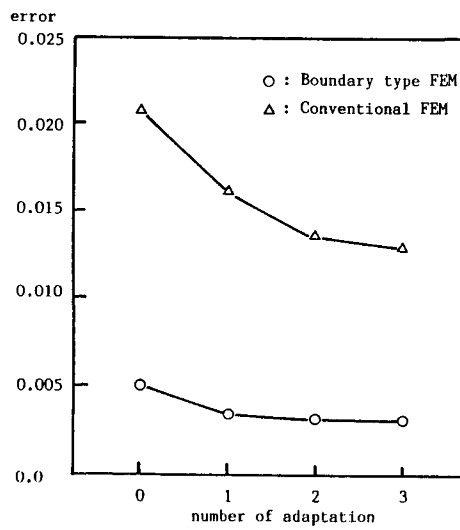

図－1　最適化手法のフローチャート

### 4。数値計算例

最適化手法の有効性を検討するために、図－2に示す長方形水路の自由振動問題に適用した。図－2が最適化手法を適用する以前の初期要素分割図である。計算条件としては、水路の固有振動モードとなる波数kを用いた。なお、図－1のフローチャート中の①と②のループは、それぞれ2回とした。図－3は、2次モードの場合の最適化手法の適用の回数と節点における厳密解との絶対誤差の平均値との関係を示したものである。縦軸に絶対誤差、横軸に最適化手法の適用の回数をとっている。図中、○印が境界型有限要素法による結果であり、△印が三角形一次要素を用いた従来の有限要素法による結果である。図より、最適化手法を適用することにより、精度がより向上していることが分かる。図－4に、境界型有限要素法に最適化手法を適用した場合の、最終的な要素分割図を示す。図より、速度ポテンシャルの一階微分値の変化に応じて要素分割が自動的に再分割されていることが分かる。



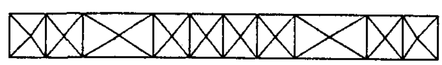
図－2　初期要素分割図




図－3　最適化手法と誤差の関係

### 5。おわりに

本報告によって、有限要素分割の最適化手法の概要を述べ、水面波動問題への適用について検討を行った。その結果、解の精度はより向上し、有効性が確認された。また、最適化手法を用いることにより、これまで分らなかった誤差の分布状況が有限要素分割図から把握できる利点がある。



図－4　最適化された要素分割図

《謝辞》　本研究を行うにあたり、ミシガン大学応用力学科教授 菊池 昇先生の御教示を賜った。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献　1) M.Kawahara and K.Kashiyama: Boundary type finite element method for surface wave motion based on trigonometric function interpolation, Int. J. Nemer. Method Eng., Vol.21,No.10, 1985.　2) K.Kashiyama and M.Kawahara: Boundary type finite element method for surface wave problems,Proc. of JSCE,No.363,1985.　3) N.Kikuchi: Adaptive grid design methods for finite element analysis, 2nd Joint ASCE/ASME Mechanics Conference, June, 1985.