

三井造船システム技研(株) 正員 桜井 英行  
 中央大学 正員 川原 睦人  
 中央大学 学生員 櫻山 和男

1. はじめに

表面波の解析は、従来から差分法や有限要素法などに代表されるような数値解法によって広く行われている。中でも有限要素法は、解析領域の幾何学的形状や、水深変化の影響も容易に表現でき、また境界要素法など他の数値解法と結合することによって、無限領域問題も簡単に取り扱うことができることから、その果たす役割は大きいと言える。しかし、一般によく用いられる有限要素法では近似精度が十分であるとは言えず、実際の港湾の解析を行う場合には、非常に細かい要素分割を必要とする場合が多い。そこで、境界型有限要素法という新しい有限要素法が提案された。<sup>1)</sup>この方法は、要素性能を向上させるために内挿多項式としてヘルムホルツ方程式を満足する三角関数を用いる方法である。しかし、その形状関数は要素間境界上での連続条件を犯す非適合なものである。

本報告では、ハイブリッド変分原理に境界型有限要素法を適用することを検討する。ハイブリッド法は、各要素ごとに未知関数を独立に仮定する方法であり、境界型有限要素法のように特殊な関数を用いる場合には有利な方法であると言える。また、要素境界に沿うラグランジュ乗数を用いることにより要素間境界上での連続条件は緩和されることになる。

2. 基礎方程式

表面波の基礎方程式としては、緩やかな水深変化を許容するマイルドスロープ方程式を用いる。<sup>2)</sup>

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \eta) + \omega^2 \frac{C_g}{C} \eta = 0 \quad \text{in } V \quad (1)$$

ここで、 $\eta$ ,  $\omega$ ,  $C$ ,  $C_g$  はそれぞれ水位変動量、角振動数、波速、群速度である。また、 $V$  は解析領域を表す。境界条件としては、次式で示されるものを導入する。

$$\eta = \hat{\eta} \quad \text{on } S_\eta \quad (2), \quad \eta_{,n} = \partial \eta / \partial n = \hat{\eta}_{,n} \quad \text{on } S_n \quad (3)$$

ここに、 $S_\eta$ ,  $S_n$  はそれぞれ  $\eta$ ,  $\eta_{,n}$  が規定される境界を表す。

3. ハイブリッド境界型有限要素法

2. で示された境界値問題に対してハイブリッド型変分原理を導入する。すると、要素間境界上での  $\eta$  の連続性を付加した汎関数は次のようになる。<sup>3)</sup>

$$\Pi_h = \sum_e \left\{ \frac{1}{2} \int_{V_e} [CC_g (\nabla \eta)^2 - \omega^2 \frac{C_g}{C} \eta^2] dV + \int_{\partial V_e} \lambda (\tilde{\eta} - \eta) dS - \int_{(S_n)_e} CC_g \tilde{\eta}_{,n} dS \right\} \quad (4)$$

ここに、添字  $e$  は  $e$  番目の要素を表し、 $\Sigma$  は全要素の和を意味する。また、 $\partial V_e$  は  $e$  番目の要素の境界であり、 $(S_n)_e$  は領域境界  $S_n$  と一致する要素境界の一部である。 $\tilde{\eta}$  は全要素境界に沿う関数で、要素間境界上と  $S_n$  上で  $\tilde{\eta}$  に等しく、 $S_\eta$  上では  $\hat{\eta}$  に等しい。そして、 $\lambda$  は各要素境界に沿う関数で、停留解においては  $CC_g \eta_{,n}$  という物理的意味をもつ。

有限要素としては、図-1に示すような四節点四角形要素を用いる。ここで、 $C$ ,  $C_g$  は波の分散関係式から決定される。そして、未知関数  $\eta$  は次のようなヘルムホルツ方程式を満足する式で仮定される。

$$\eta = \beta_1 \cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x\right) \cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}y\right) + \beta_2 \cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x\right) \sin\left(\frac{k}{\sqrt{2}}y\right) + \beta_3 \sin\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x\right) \cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}y\right) + \beta_4 \sin\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x\right) \sin\left(\frac{k}{\sqrt{2}}y\right) \quad (5)$$

ここで、 $k$  は波数、 $\beta_1 \sim \beta_4$  は各要素ごとに独立な未定定数である。 $\lambda$  は、 $\eta$  で表すことによって直接消去

することができる。

また、 $\tilde{\eta}$ はその節点値を用いて次のように表す（節点1、2間において）。

$$\tilde{\eta} = (1 - s/l_{12})\tilde{q}_1 + (s/l_{12})\tilde{q}_2 \quad (6)$$

ここに、 $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ は節点1、2における $\tilde{\eta}$ の値、 $s$ は節点1から節点2の方向に測った距離、 $l_{12}$ は二点間の距離である。

汎関数(4)の右辺第一項を部分積分し、(5)式がヘルムホルツ方程式の解を満足するということを用いると、汎関数は次のように要素境界上の線積分のみで記述することができる。

$$\Pi_h = \sum_e \left\{ -\frac{1}{2} CC_g \int_{\partial V_e} \eta_n n_n dS + CC_g \int_{\partial V_e} n_n \tilde{\eta} dS - \int_{(S_n)_e} CC_g \tilde{\eta}_n n_n dS \right\} \quad (7)$$

4. 数値計算例

ここでは、簡単のため水深は一定とし、図-2に示すような長方形水路の自由振動問題を取り扱う。要素分割は、図-3に示すように三種類用意した。計算は固有振動モードとなるような波数 $k$ を用いて行った。図-4に計算結果を示す。縦軸に誤差、横軸に波長と要素巾との比をとっている。図中、 $\Delta$ 印は従来の線形の適合形状関数を用いた有限要素法による誤差、 $\circ$ 印は非適合要素の境界型有限要素法による誤差、 $\square$ 印はハイブリッド境界型有限要素法による誤差である。なお、誤差は次式のように定義した。

$$\text{誤差} = [\sum (\text{計算値} - \text{厳密解})^2]^{1/2}$$

図より、ハイブリッド境界型有限要素法による結果は、どの場合においても従来の有限要素法による結果よりも精度が良いことが分かる。また、非適合の境界型有限要素法は、Mesh 2の場合において精度が悪化しているのが分かる。これは、非適合の境界型有限要素法は一定値をモデル化できないためと考えられる。

5. おわりに

本報告において、ハイブリッド型変分原理に境界型有限要素法を適用したハイブリッド境界型有限要素法を提案した。

その結果、非適合境界型有限要素法の一定値をモデル化できないという欠点は改善された。

参考文献

1) K.Kashiyama and M.Kawahara: Boundary type finite element method for surface wave problems, Proc. JSCE, 1985. 2) J.C.W.Berkhoff: Computation of combined refraction - diffraction, Proc. 13th Conf. Coastal Eng., ASCE, 1972. 3) P.Tong: New displacement hybrid element models for solid continua, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 12, 1970.

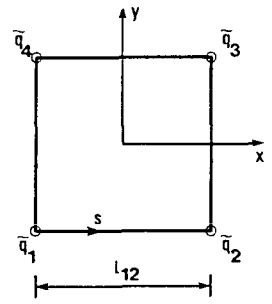
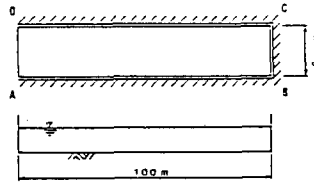


図-1 有限要素



Boundary conditions

- $\eta = 1$  on A-D
- $\eta_n = 0$  on A-B-C-D

図-2 水路と境界条件

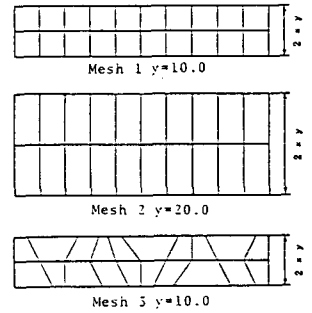


図-3 要素分割パターン

- $\Delta$  Compatible model
- $\circ$  Boundary type model
- $\square$  Hybrid boundary type model

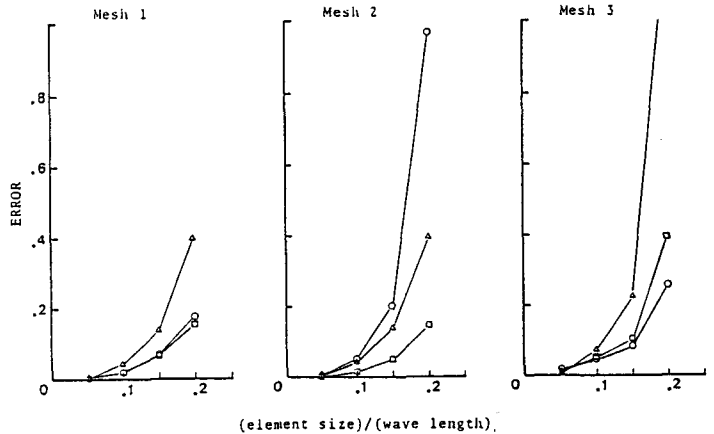


図-4 誤差の比較