# II-261　シルに作用する圧力の分布形状に関する考察


日本大学大学院理工　学　山中康資
日本大学理工学部　正　粟津清蔵
日本大学理工学部　正　大津岩夫


鉛直連続シルによって強制跳水(I.II型跳水)が形成される場合、および發散流況となる場合、のシル前面に作用する圧力の分布形状は、実験的にFig. 1のように示される[1]。ここでは、このような分布が得られる理由について考察を行う。

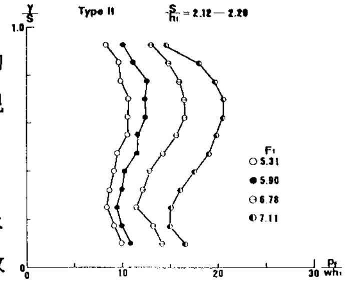


Fig.1

水路側面からの内部流況の注意深い観察、およびシル前方の流速の測定結果によると、I.II型跳水$(Y_S/h_1 \leqq 0.6\sim0.7)$、發散流況、共にシル前面に渦の形成が認められる。なお、一様剪断流中に置かれた垂直平板前面にも渦の形成が認められている[2]。Fig. 2は、シル前面に形成される渦の範囲(斜線部分)を示したものである。この渦は、各流況共にほぼ同一の三角形の範囲で形成されていることが確認される。そこで、シル前方の流れの状態を三角形ABCの範囲の渦とシル前方の点Aで剥離しシル前面の点C($y=kS$、$0<k<1$)で再付着する流れに分け(Fig.3)、シル直前における流速、およびシル前面に作用する圧力を求める。なお、点Cはよどみ点である。(流れは、$\pi\alpha$の角度でシルに再付着するものと考える。)

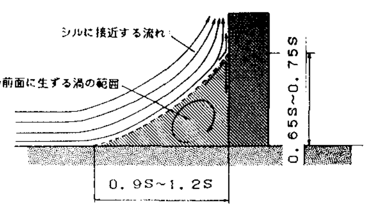


Fig.2

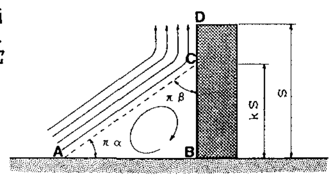


Fig.3

## ① 点B($y=0$)からよどみ点Cまでのシル直前の流速

Fig. 3に示される直角三角形領域ABCについて考える。Fig. 4の$Z_2$平面の直角三角形領域BCAと$Z_1$平面との間の写像関数は、Schwarz－Christoffelの式から式(1)で示される。なお、$Z_2$平面においてシル前面は線分BCである。

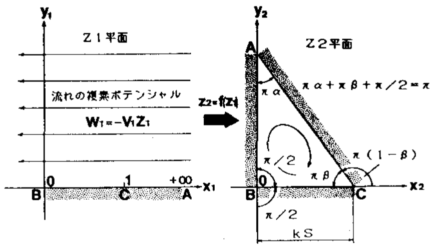


Fig.4

$$dz_2/dz_1 = k_1(z_1-0)^{-\frac{1}{2}}(z_1-1)^{\beta-1} = k_1/\{z_1^{\frac{1}{2}}(z_1-1)^{1-\beta}\} \qquad (1)$$

式(1)を積分すると式(2)が得られる。

$$z_2 = k_1\int_0^{z_1} dz_1/\{z_1^{\frac{1}{2}}(z_1-1)^{1-\beta}\} + C_1 \qquad (2)$$

ただし、$k_1$、$C_1$は定数。

式(2)において、$z_1=0$のとき$z_2=0$であるから、$C_1=0$。また、$z_1=1$のとき$z_2=kS$であるから、式(3)が得られる。

$$kS = \{k_1/e^{i\pi(1-\beta)}\}\int_0^1 dz_1/\{z_1^{\frac{1}{2}}(1-z_1)^{1-\beta}\} \qquad (3)$$

ただし、$e^{i\pi(1-\beta)}=(-1)^{1-\beta}$

式(3)をベータ関数、ガンマ関数を用いて表わすと式(4)で示される。

$$kS = \{k_1/e^{i\pi(1-\beta)}\}B(\tfrac{1}{2},\beta) \qquad (4)$$

ただし、$B(\frac{1}{2},\beta)=\{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\beta)\}/\Gamma(\frac{1}{2}+\beta)$

式(4)から、定数$k_1$は次式で示される。

$$k_1 = kS\cdot e^{i\pi(1-\beta)}/B(\tfrac{1}{2},\beta) \qquad (5)$$

したがって、$Z_1$平面と$Z_2$平面との間の写像関数は式(2)から式(6)で示される。

$$z_2 = \{kS/B(\tfrac{1}{2},\beta)\}\int_0^{z_1} dz_1/\{z_1^{\frac{1}{2}}(1-z_1)^{1-\beta}\} \qquad (6)$$

次に、直角三角形領域BCA内の流れの流速は、式(7)を用いて求められる。

$$dW_1/dz_2 = (dW_1/dz_1)\{1/(dz_2/dz_1)\}$$
$$= -V_1\{B(\tfrac{1}{2},\beta)/kS\}z_1^{\frac{1}{2}}(1-z_1)^{1-\beta} = V_{x2}-iV_{y2} \qquad (7)$$

ただし、$W_1=-V_1z_1$

$$z_1 = x_1+iy_1 = r_1e^{i\theta_1} = r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1) \qquad (8)$$

式(7)を式(8)の関係を用いて変形すると、三角形領域BCA内の流れの流速$V_{x2}$、$V_{y2}$、$V_2$(式(9)～(11))が得られる。

$$V_{x2} = -V_1\{B(\tfrac{1}{2},\beta)/kS\}\cdot r_1^{\frac{1}{2}}r_2^{1-\beta}\{\cos\tfrac{\theta_1}{2}\cos(1-\beta)\theta_2+\sin\tfrac{\theta_1}{2}\sin(1-\beta)\theta_2\} \qquad (9)$$

$$V_{y2} = V_1\{B(\tfrac{1}{2},\beta)/kS\}\cdot r_1^{\frac{1}{2}}r_2^{1-\beta}\{\sin\tfrac{\theta_1}{2}\cos(1-\beta)\theta_2-\cos\tfrac{\theta_1}{2}\sin(1-\beta)\theta_2\} \qquad (10)$$

$$V_2 = \sqrt{(V_{x2})^2+(V_{y2})^2} \qquad (11)$$

ただし、$r_1=\sqrt{(x_1)^2+(y_1)^2}$、$r_2=\sqrt{(1-x_1)^2+(y_1)^2}$

$\theta_1=\arctan(y_1/x_1)$、$\theta_2=\arctan\{y_1/(1-x_1)\}$

さらに、点B($y=0$)からよどみ点C($y=kS$)までのシル直前の流速は、式(9)～(11)に$y_1=0$を代入すれば得られる。(式(12)～(14))

$$\begin{cases} V_{x2} = -V_1\{B(\tfrac{1}{2},\beta)/kS\}\cdot x_1^{\frac{1}{2}}(1-x_1)^{1-\beta}\ (\leqq 0) & (12) \\ V_{y2} = 0 \quad (13) \qquad V_2 = V_{x2} & (14) \end{cases}$$

## ② よどみ点Cから点D($y=S$)までのシル直前の流速

Fig. 3に示される直角三角形領域ABCより上の領域について考える。Fig.5の$Z_4$平面の線分AC, CDより上の領域と$Z_3$平面との間の写像関数は、Schwarz-Christoffelの式から式(15)で示される。なお、$Z_4$平面においてシル前面は線分CDである。

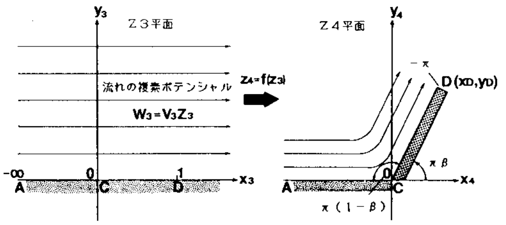


Fig.5

$$dZ_4/dZ_3 = K_3(Z_3-0)^{-\beta}(Z_3-1)^{-(-1)} = K_3(Z_3^{1-\beta} - Z_3^{-\beta}) \qquad (15)$$

式(15)を積分すると式(16)が得られる。ただし、$K_3$, $C_3$は定数。

$$Z_4 = \{K_3/(2-\beta)(1-\beta)\}\{(1-\beta)Z_3^{2-\beta} - (2-\beta)Z_3^{1-\beta}\} + C_3 \qquad (16)$$

式(16)において、$Z_3=0$のとき$Z_4=0$であるから、$C_3=0$。また、$Z_3=1$のとき$Z_4=x_D+iy_D$であるから、$K_3$は次式で示される。

$$K_3 = -(2-\beta)(1-\beta)(x_D+iy_D) \qquad (17)$$

ただし、点D$(x_D, y_D) = ((1-k)S\cos\pi\beta,\ (1-k)S\sin\pi\beta)$

したがって、$Z_3$平面と$Z_4$平面との間の写像関数は、式(16)から式(18)で示される。

$$Z_4 = -(x_D+iy_D)\{(1-\beta)Z_3^{2-\beta} - (2-\beta)Z_3^{1-\beta}\} \qquad (18)$$

次に、線分AC, CDより上の領域の流れの流速は、式(19)を用いて求められる。

$$\begin{aligned} dW_3/dZ_4 &= (dW_3/dZ_3)\{1/(dZ_4/dZ_3)\} \\ &= -[V_3/\{(2-\beta)(1-\beta)(x_D+iy_D)\}]\cdot Z_3^{\beta}/(Z_3-1) \equiv V_{x4} - iV_{y4} \qquad (19) \end{aligned}$$

ただし、$W_3 = V_3 Z_3$

$$Z_3 = x_3 + iy_3 = r_3 e^{i\theta_3} = r_3(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3) \qquad (20)$$

式(19)を式(20)の関係を用いて変形すると線分AC, CDより上の領域の流れの流速$V_{x4}$、$V_{y4}$、$V_4$（式(21)～(23)）が得られる。

$$\begin{cases} V_{x4} = -[V_3/\{(2-\beta)(1-\beta)\}]\cdot(AC+BD)/(C^2+D^2) & (21) \\ V_{y4} = [V_3/\{(2-\beta)(1-\beta)\}]\cdot(BC-AD)/(C^2+D^2) & (22) \\ V_4 = \sqrt{(V_{x4})^2 + (V_{y4})^2} & (23) \end{cases}$$

ただし、$A = r_3^{\beta}\cos\beta\theta_3$、$B = r_3^{\beta}\sin\beta\theta_3$

$C = x_D(r_3\cos\theta_3 - 1) - y_D r_3\sin\theta_3$、$D = y_D(r_3\cos\theta_3 - 1) + x_D r_3\sin\theta_3$

$r_3 = \sqrt{(x_3)^2 + (y_3)^2}$、$\theta_3 = \arctan(y_3/x_3)$

さらに、よどみ点C($y=kS$)から点D($y=S$)までのシル直前の流速は、式(21)～(23)に$y_3=0$を代入すれば得られる。（式(24)～(26)）

$$\begin{cases} V_{x4} = -[V_3/\{(2-\beta)(1-\beta)\}]\cdot[x_3^{\beta}x_D/\{(x_D^2+y_D^2)(x_3-1)\}]\ (\geqq 0) & (24) \\ V_{y4} = -[V_3/\{(2-\beta)(1-\beta)\}]\cdot[x_3^{\beta}y_D/\{(x_D^2+y_D^2)(x_3-1)\}]\ (\geqq 0) & (25) \\ V_4 = \sqrt{(V_{x4})^2 + (V_{y4})^2} & (26) \end{cases}$$

## ③ シル前面に作用する圧力分布

シル前面に作用する圧力$P_f$は、式(12)～(14)、式(24)～(26)からシル直前の流速$v$を求め、Bernoulliの式(27)に代入することによって得られる。

$$v_A^2/2g + h_A = v^2/2g + (P_f/w + y) \qquad (27)$$

ただし、$v_A$は点A(Fig.3)における流速、$h_A$は点A(Fig.3)における水深、$(P_f/w+y)$はピエゾ水頭である。

飛散流況の場合、式(27)の$v_A$、$h_A$は、$v_A = v_1$、$h_A = h_1$と考えられる。また、式(12)～(14)、式(24)～(26)において、$V_1 = 0.8v_1$、$V_3 = 0.2v_1$、$\beta = 1/3$、$k = 0.65$として計算した一例をFig.6に示す。

I、II型跳水の場合、適切な$v_A$、$h_A$を定めれば、同様な方法でシル前面に作用する圧力$P_f$が得られる。

以上のことから、シル前面に作用する圧力分布がFig.1に示されるような形状になる理由の説明がなされたものと考えられる。

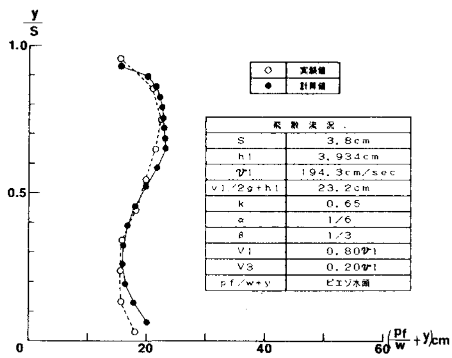


Fig.6

《参考文献》

1）山中康資、粟津清蔵、大津岩夫：『シルに作用する流体力について（２）』土木学会第４０回年次学術講演会講演概要集　II－134　昭和60年9月

2）坂本弘志、森谷　優、有江幹男：『乱流境界層内におかれたにぶい物体周辺の流れに関する研究』（第１報、垂直平板の抗力）日本機械学会論文集（第2部）41巻342号　昭和50年2月

《記　号》

h1：跳水始端の水深　h2：自由跳水の場合のh1に共役な水深　Xs：跳水始端からシル前面までの長さ　S：シルの高さ　Lj：自由跳水の場合の跳水長さ（＝5.5h2）　F1：跳水始端のフルード数　y：床板からの高さ　w：水の単位体積当りの重量　v1：跳水始端の流速