II-228　相対的に大きい粗度近傍の流速

立命館大学理工学部　正員　大同淳之

1．はしがき　　掃流砂のある流れ、あるいは底面の突起が相対的に大きい流れでは、底面付近で、流速が対数則からはずれて、ほぼ一様になろうとする傾向があり、この流速を十分に算定する方法は提案されていない。この流速を正確に表現することが、流砂現象、抵抗則のより正確な算定のために必要である。本文は、境界に、相対的に大きい粗度があるとき、それから生ずる渦による乱れが、底面付近の流れに影響を与えていると考え、この効果のせん断力への誘導を試みた。

2．渦による鉛直流れのモデル化

(i)突起からの渦の発生　　突起からの渦の発生の原因については種々のものが考えられるが、それらをカルマン渦の形でモデル化し、突起後流に生じている渦の循環Γを求める。突起の表面から、剥離し形成される渦の渦放出周波数をf、渦の循環をΓとすると、単位時間に通過する循環はfΓで、剥離点における境界層外縁の流速をu_sとすると、

$$f\Gamma = e_1(1/2)\,u_s^2 \tag{1}$$

と表される。e_1は係数で、$e_1<1$である。主流に相対的な渦の速度をvとすると、$f=(u_0-v)/a$、$u_s=ku_0$、u_0：主流の代表流速、a：渦の流れ方向の間隔、を用いて、(1)式は[1)]

$$\{1-(v/u_0)\}(\Gamma/u_0 a) = e_1(1/2)\,k^2 \tag{2}$$

となる。カルマンの渦列を生じる抗力係数C_Dとvの関係,$(l/a)C_D = \frac{4}{\pi}\frac{v}{u_0}\coth\frac{\pi b}{a}\left\{\frac{\pi b}{a}\left(1-2\frac{v}{u_0}\right)+\frac{v}{u_0}\coth\frac{\pi b}{a}\right\}$[2)]
b：z方向の渦の間隔、渦放出ストローハル数$S=(l/a)(1-v/u_0)$、$\partial(l/a\cdot C_D)/\partial(b/a)=0$のKronauerの条件および、$S_b=fb/u_0$=一定の経験則を用いると、S、$C_D$およびkを与えると$e_1$、fおよびΓを決めることができる。この結果、渦の発生面に沿う水平面を、鉛直方向に流れる渦の速度w_*を

$$w_* = f\Gamma/2\pi(\varepsilon_1/2) \tag{3}$$

と表すことにする。ε_1は基準面における渦の直径である。

(ii)運動式　　流れの中を、渦が上昇するA、B２つの水平面を考える。一つの面から、他の面への全エネルギーの変化は、運動エネルギーの変化で生じ、運動エネルギーの変化は、速度と質量の変化で起こり、これは渦の質量に作用する抗力の形[3)]で表すとすると、渦の運動式は、渦の質量を$\rho\varepsilon^3$、渦の上昇速度をw_*、抗力係数C_rとして、

$$d(m w_*^2/2) = \rho C_r \varepsilon^2 (w_*/2),\qquad m=\rho\varepsilon^3 \tag{4}$$

となる。これを整理すると、次のようになる。

$$3\,d\varepsilon/\varepsilon + 2\,dw_*/w_* = C_r\,dz/\varepsilon \tag{5}$$

(iii)連続式　　渦が水平面A、Bを動くとき、質量要素が、単位時間当たりξの割合で、dzの間に$d\varepsilon$だけ変化すると考える。その量を、$(\varepsilon+d\varepsilon)^2$の面積を速度$(w_*+dw_*)$で、dtの間に通過する質量に付加される質量として、$4\varepsilon\rho\,dz\,\xi\,dt$とすると、

$$\rho(\varepsilon+d\varepsilon)^2(w_*+dw_*) = \rho\varepsilon^2 w_*\,dt + \rho(4\varepsilon)\,dz\,\xi \tag{6}$$

ξはw_*に比例するとして、$\xi=a_1 w_*$として、式(6)を整理すると、次のようになる。

$$d\varepsilon/\varepsilon + dw_*/2w_* = 2a_1\,dz/\varepsilon \tag{7}$$

iv)渦の大きさとその鉛直方向速度

式(5)と式(7)より、

$$d\varepsilon/\varepsilon = (8a_1 - C_r)(dz/\varepsilon) \tag{8}$$

となる。渦の大きさεは式(8)を積分して

$$-\varepsilon = (8a_1 - C_r)(z+\varepsilon_1) \tag{9}$$

より　$d\varepsilon/\varepsilon = dz/(z+c_1)$ (10)

この結果を式(1)に代入して、$4a_1=C_1$として整理すると、次のようになる。

$$\omega_* = \omega_{*0}\, C_1 / (z+C_1) \tag{11}$$

３．渦の上昇に伴う底面付近の流速分布

２．で考察した渦が、河床の単位面積、単位時間あたりにk個発生するとする。この渦によって上昇する流れは、単位面積当たり、つぎのように表せよう

$$\rho k\varepsilon^3 w_* = \rho k\varepsilon^3 w_{*0}/(z+C_1) = \rho\beta\, w_{*0}/(z+C_1),\quad \beta = k\varepsilon^3 \tag{12}$$

流れの上昇に伴って循環流が生じる。この循環流によって、流れの中の水平な単位面積、単位時間当たりに鉛直方向に上昇及び下降する質量は等しいとして、その差をとると、

$$(1/2)\rho\beta\, w_{*0}/(z+C_1) - (-1/2)\rho\beta\,\omega_{*0}/(z+C_1) = \rho\beta\, w_{*0}/(z+C_1) \tag{13}$$

と表される。この質量が、その面での主流の流速uで、x方向に運ばれるとすると、その面に作用するせん断力は、

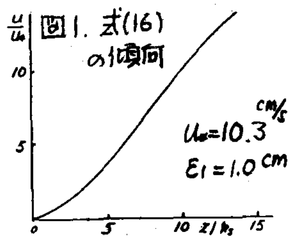
$$\tau = \rho\beta\,\omega_{*0}\, u/(z+C_1) \tag{14}$$

と表される。ここで、あらためて$w_{*0}\propto\alpha(du/dz)$として、$w_*=\alpha(du/dz)$とする。$\alpha$は係数。

$$\tau = \alpha\rho\beta\frac{u}{z+C_1}\frac{du}{dz} = \rho F\frac{u}{z+C_1}\frac{du}{dz},\qquad F=\alpha\beta, \tag{15}$$

この渦に伴うせん断力が、通常の乱れによるせん断力に加わるものとして、

$$\tau = \rho l^2\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \rho F\frac{u}{z+C_1}\frac{du}{dz} \tag{16}$$



式(15)を、数値積分した結果と実測値との比較は図１のとおりである。この測定では、ε_1の値は不明であるので、玉井らの測定値[4)]を参考にしてε_1=1.0cmとした。ただし、ε_1の値が少々変わっても計算値には大きな変化は出ていない。

式(16)を近似的に解いて結果は次のとおりである。すなわち、河床面のごく近傍では、式(15)の右辺第１項は、第２項に比して小さいとして、uを求めると、$u/u_*=\sqrt{2z/F'}$、これを式(15)のuに代入すると、

$$\tau/\rho = l^2(du/dz)^2 + \sqrt{2\beta'}\, u_*\sqrt{z}\,(du/dz) \tag{17}$$

となる。滑面上に砂れきを流して流速を測定した実験と比較するため、$l=\kappa(z-\delta_s)$、κ:Karman定数、δ_sは底面近傍の特性厚さとする。

式(17)を積分して、$u_* l/\nu$が大きいところで、$l=\kappa z$、$z=\delta$で、$u=u\delta$とすると、

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\ln\left\{\frac{u_*z}{\nu}\left(1+\sqrt{1+\frac{F_s}{\kappa\frac{u_*z}{\nu}}}\right)+\frac{F_s}{2\kappa}\right\} + \frac{2F_s}{\kappa^2\frac{u_*z}{\nu}\left(1+\sqrt{1+\frac{F_s}{\kappa\frac{u_*z}{\nu}}}\right)} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{F_s}{\kappa^2}}\frac{1}{\frac{u_*z}{\nu}}$$

$$+\frac{1}{\kappa}\ln\kappa + C_2\quad,\ C_2:積分常数 \tag{18}$$

ここに$F_s=\beta u_*/2\kappa\nu$　である。式(18)の右辺第２項、第３項を左辺に移項すると、この左辺と右辺第１項の｛　｝で括られた量の対数との間には$1/\kappa$の勾配で直線関係が成立する。測定値との比較を図２に示す。

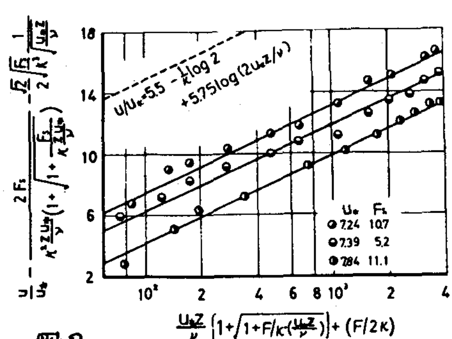


図２

1)木谷：日本機械学会論文集50巻452号., 2)Bearman: J.Fuild.Mech,28-4(1967), 3)E.H.Cheng:Incipient Motion of Large Roughness Elements,Ph D,dis Utah Univ. 70'、4)玉井：第25回水講81'