

II-223 河川を遡上する長周期波の解析解の適用範囲

神戸大学工学部 正員 神田 徹  
 神戸大学大学院 学生員 ○浜村 吉昭  
 神戸大学大学院 学生員 村岡めぐみ

1. はじめに

著者らは先に、長周期波遡上による河川下流部の水位変動の解析解を示したが、これは一次元非定常流の方程式において慣性項を省略して得られた近似解である。本研究はその精度を調べることにより、この解析解が実用上適用し得るパラメータの範囲を明らかにしようとしたものである。

2. 基礎方程式とその解

図-1の河道モデルを考え、無次元量  $x'=x/l$ ,  $h'=h/h_0$ ,  $t'=t/(l/\sqrt{gh_0}) \equiv t/T_0$ ,  $v'=v/\sqrt{gh_0}$  を用いれば、基礎方程式および境界条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + v' \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial h'}{\partial x'} + 1 + \frac{gn^2}{h_0^{3/2} I} \frac{v' |v'|}{h'^{4/3}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} + \frac{\partial (h'v')}{\partial x'} = 0 \quad (2)$$

$$h'(0, t) = \frac{A_0}{2h_0} (1 - \cos \gamma t') + 1, \quad h'(\infty, t) = 1 \quad (3)$$

式(1)において慣性項を省略すれば次式となる。

$$v' |v'| = -\frac{1}{In'} h'^{4/3} \left( 1 + \frac{\partial h'}{\partial x'} \right) \quad (4)$$

式(2)~(4)から2次近似の解析解が次のように得られる。

$$h' = 1 + \frac{A_0'}{2} y_1 + \frac{A_0'^2}{4} y_2 \equiv 1 + \Delta H' \quad (5)$$

$$y_1 = \exp\left(-\frac{10}{3}x'\right) - \exp\left\{-\left(\frac{5}{3} + p_1\right)x'\right\} \cos(\gamma t' - q_1 x') \quad (6)$$

$$y_2 = \frac{13}{6} \left\{ \exp\left(-\frac{10}{3}x'\right) - \exp\left(-\frac{20}{3}x'\right) \right\} + D_0 \left[ \exp\left(-\frac{10}{3}x'\right) - \exp\left\{-2\left(\frac{5}{3} + p_1\right)x'\right\} \right] + D_1 \left[ \exp\left\{-(5+p_1)x'\right\} - \exp\left\{-\left(\frac{5}{3} + p_1\right)x'\right\} \right] \cos(\gamma t' - q_1 x' + \theta_1) + D_2 \left[ \exp\left\{-\left(\frac{5}{3} + p_1\right)x'\right\} \cos(2\gamma t' - q_2 x' + \theta_2) - \exp\left\{-2\left(\frac{5}{3} + p_1\right)x'\right\} \cos(2\gamma t' - 2q_1 x' + \theta_2) \right] \quad (7)$$

すなわち、 $\Delta H'$ は $A_0'$ ,  $T'$ ,  $In'$ をパラメータとする $x'$ ,  $t'$ の関数である。

3. 慣性項省略の影響と解析解の精度

(1)精度の検証法 解析解の精度の検証は次の2段階に分けて行った。(a) 式(1)に対する数値解と式(4)に対する数値解を比較し、慣性項省略の影響を調べる。(b) 式(4)に対する数値解と解析解、式(5)を比較しその精度を検討する。ここに、数値解(陰型式差分法)を厳密解にかわるものと考えている。ここでは、河川の治水対策上最も重要と思われる河道に沿う最高水位を求め(図-2に一例を示す)、次式で表される誤差率 $\eta$ を定義する。

$$\eta = \frac{[\{\Delta H_2'_{\max}(x') - \Delta H_1'_{\max}(x')\}^2]^{1/2}}{\Delta H_1'_{\max}(x')} \quad (8)$$

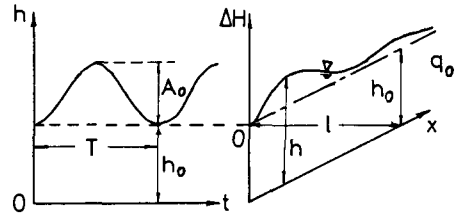


図-1 河道モデル

$A_0$ : 河口における波の振幅,  $T$ : 波の周期  
 $q_0$ : 無限上流での単位幅流量,  $h_0$ :  $q_0$ に対する等流水深,  $\Delta H = h - h_0$   
 $I = h_0/l$ : 河床勾配,  $\gamma = 2\pi/T'$ ,  
 $A_0' \equiv A_0/h_0$ ,  $T' \equiv T/T_0$ ,  $In' \equiv gn^2/(h_0^{3/2} I)$ ,  
 $D_0, D_1, D_2, \theta_1, \theta_2$ :  $T'$ の関数。

$$\begin{aligned} \begin{cases} P_1 \\ Q_1 \end{cases} &= \left[ \left\{ \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^4 + 4\gamma^2 In'} \pm \left(\frac{5}{3}\right)^2 \right\} / 2 \right]^{1/2} \\ \begin{cases} P_2 \\ Q_2 \end{cases} &= \left[ \left\{ \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^4 + 16\gamma^2 In'} \pm \left(\frac{5}{3}\right)^2 \right\} / 2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

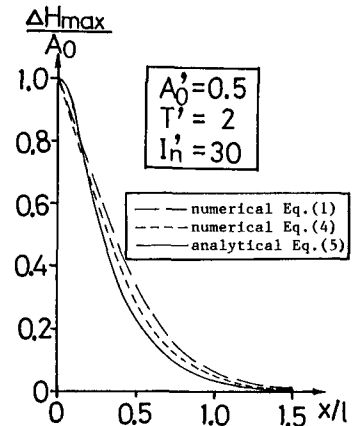


図-2 河道に沿う最高水位

ここに、(a)の検討では、 $\Delta H_1'.max$  : 式(1)に対する数値解から求まる最高水位、 $\Delta H_2'.max$  : 式(4)に対する数値解から求まる最高水位。(b)の検討では、 $\Delta H_1'.max$  : 式(4)に対する数値解から求まる最高水位、 $\Delta H_2'.max$  : 解析解から求まる最高水位。また、— は河口( $x'=0$ )から $x'=1.5$ の地点までの場所的平均を表す。

(2)慣性項省略の影響 図-3の実

線は慣性項を省略したことによる誤差率が5%および10%以内である限界線を、また、 $\Delta$ 印、 $\circ$ 印はそれぞれ  $\Delta H_2'.max < \Delta H_1'.max$ 、 $\Delta H_2'.max > \Delta H_1'.max$  となるケースを示す。 $In'=10$ の場合、 $A_0'$  が小さく $T'$  が大きい領域でも慣性項省略の影響が大きくなっている。つまり、 $\Delta$ 印のケースでは $A_0'$  が大きく $T'$  が小さいほど、 $\circ$ 印のケースでは $A_0'$  が小さく $T'$  が大きいほど省略の影響が大きくなるといえる。これは、 $\circ$ 印のケースでは流れは準定常的であるので、式(1)の第2項を省略したことによる影響が大きいものと思われる。

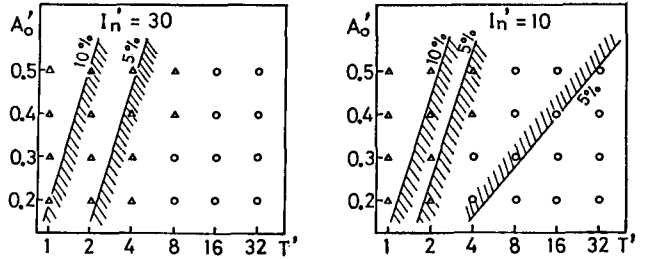


図-3 慣性項が省略できる限界線

(3)解析解の精度 図-4に式(4)の数値解に対する解析解の誤差率 $\eta$ を示す。 $A_0'=0.5\sim 0.4$ では $T'$ が若干影響するが、 $\eta$ は殆ど $A_0'$ のみに関係している。例えば、河口水位変動の振幅が等流水深の3/10程度であれば $\eta$ は5~6%であり、高精度の近似解である。さらに振幅が大きくなり、等流水深の4/10程度になると $\eta$ は8~10%であるから、 $A_0'=0.4$ 程度が解析解の適用できる限界であろう。

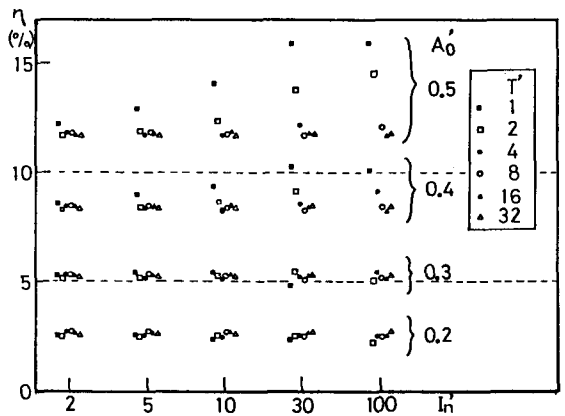


図-4 解析解の誤差率

4. 解析解の適用範囲

実用的な見通しを得るため、図-5に河床勾配を $I=1/10000$  および $I=1/3000$ に固定して、有次元のパラメータを用いて解の適用範囲を示す。図における破線および実線はそれぞれ、慣性項を省略したときの誤差率および解析解の誤差率が5%あるいは10%以内の限界線であり、両者を満足する領域が解析解の適用できる領域となる。いずれのケースも解析解の誤差率は相対波高 $A_0'$ のみに関係しているが、慣性項を省略したことによる誤差率は各パラメータが複雑に関係し、解の適用範囲を大きく左右する。比較的緩勾配な場合( $I=1/10000$ )、慣性項省略による誤差率は、図-3の $\Delta$ 印のケースであるが、比較的急勾配の場合( $I=1/3000$ )、図-3の $\circ$ 印のケースに含まれるため、 $A_0$ が小さいほど省略の影響が大きいという傾向がみられる。

5. おわりに

以上解析解の適用範囲について検討してきたが、慣性項の省略の影響は複雑であり、実用に当たっては注意を要する。

本文は文部省科学研究費、自然災害特別研究(代表者:吉川秀夫早大教授)の補助を受けて行った研究成果の一部であり、記して謝意を表す。

参考文献 1) 神田・浜村:長周期波の河川遡上に関する基礎的考察,土木学会論文集,第369号/II-5,1986.

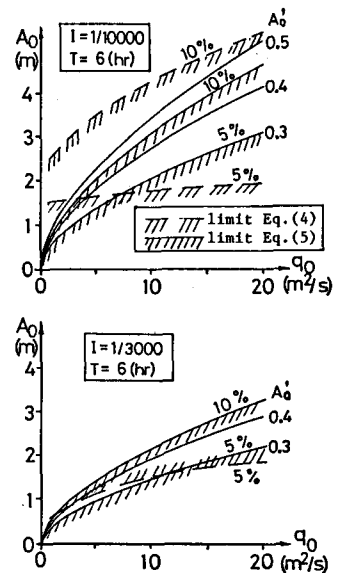


図-5 解析解の適用範囲