

II-221 自由蛇行流の蛇行形状と蛇行限界

日本大学工学部 正員 ○木村喜代治 高橋勉夫 長林久夫

昨年の年次講演会において、自由蛇行流の回転運動エネルギーを考慮し、その中心線の平面形状を求めると *Elastica* の曲線になることを示した。このとき問題を変分学の等周問題として取扱い Lagrange 乗数 λ を用いたものである。しかしながら λ のままであると水理的關係が明らかでないので、この点を考慮し、更に考察を広げたものである。

ここでは運動エネルギーと同時にポテンシャルエネルギーを用いて考察する。問題を単純化するために平均流速 v 、流積 A 、断面二次モーメント I を一定として取り扱う。

任意断面を単位時間に流れる流体の回転運動エネルギーは前報より

$$E_R = \frac{3 w Q I \omega^2}{g A} \quad (1)$$

ω は回転角速度。よって dt 時間では

$$E_R dt = \frac{3 w I \omega^2}{g} v \cdot dt = \frac{3 w I \omega^2}{g} ds$$

ただし $ds = v \cdot dt$ 。上式右辺は曲線長 ds 間の流体部分の回転運動エネルギーを示す。蛇行形状が蛇行帯軸 x に対し滑らかに左右交互に蛇行するものと考え、

Fig.1 の z 軸に対し対称になると考えられる。従ってエネルギー計算の対象とする流路長は第一義的に同図の MN の倍、すなわち $l_c = 2S$ とする。曲線長 l_c の間の回転運動エネルギー F_R は

$$F_R = \frac{6 w I Q^2}{g A^2} \int_0^S \frac{1}{R^2} ds \quad (2) \quad \text{ただし } R \text{ は蛇行中心線の曲率半径。}$$

並進運動エネルギー F_v は平均流速を一定と仮定しているので $F_v = \frac{w l_c Q^2}{2 g A} \quad (3)$

蛇行帯軸は一様に角度 i で傾斜しているものとしてポテンシャルエネルギーを計算する。Fig.1 の N 点を基準にすると曲線上のポテンシャルエネルギー F_p は

$$F_p = w A l_c \sin i \int_0^S \cos \theta \cdot ds \quad (4)$$

運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを合計すると

$$F = F_R + F_p + F_v = \frac{6 w I Q^2}{g A^2} \int_0^S \frac{1}{R^2} ds + w A l_c \sin i \int_0^S \cos \theta ds + \frac{w Q^2}{g A} \int_0^S ds \quad (5)$$

となる。上式右辺の各定数をそれぞれ

$$\alpha = \frac{6 w I Q^2}{g A}, \quad \beta = w A l_c \sin i, \quad \gamma = \frac{w Q^2}{g A} \quad (6)$$

として表す。従って $F = \int_0^S (\alpha/R^2 + \beta \cos \theta + \gamma) ds = \int_0^S f ds = \min \quad (7)$

$1/R^2 = (d\theta/ds)^2$ であるから、Euler の微分方程式より $2\alpha d^2\theta/ds^2 + \beta \sin \theta = 0 \quad (8)$

これを解くと $\alpha/\beta \cdot (d\theta/ds)^2 - \cos \theta = C \quad (9)$ 蛇行曲線は蛇行帯軸 (すなわち x 軸) を軸として交互に滑らかな曲線を形成するものと考え、曲線と x 軸の交点が変曲点になる。これより $s=S$ で $d\theta/ds = 1/R = 0$ かつ $\theta = \theta_0$ とすると

$$s = \int_0^S ds = \sqrt{[2\alpha/\beta] \int_0^{\theta_0} 1/\sqrt{[2(\cos \theta - \cos \theta_0)]} \cdot d\theta \quad (10)$$

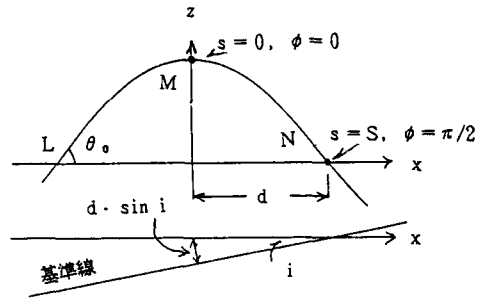


Fig. 1

これは Euler による *Elastica* の曲線と全く相似である。この式で $k = \sin(\theta_0/2)$, $\sin(\theta/2) = k \sin \phi$, また $c = \sqrt{[\beta / (2\alpha)]} = \sqrt{[gA^3 \ell_c \sin i / (12IQ^2)]} = \sigma \ell_c^{1/2}$ とすると $c \ell = \int_0^\phi 1 / \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \phi)} \cdot d\phi = F(k, \phi)$, $cS = K(k)$ (11) c の中に含まれている曲線長 ℓ_c は一定であり, $\ell = m \ell_c$ (ただし $m = 1, 2, \dots$) と置くと $c \ell = \sigma \ell_c^{1/2} \ell = \sigma m^{1/2} \ell^{3/2} = 2mK(k)$ (12) , ここで

$$K_1 = \sigma \ell^{3/2} = \sqrt{\left(\frac{gA^3 \ell^3 \sin i}{12IQ^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\ell/2 \cdot \sin i}{v^2 / (2g)}\right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)} \cdot \frac{\ell}{r_r} \quad (13)$$

K_1 は無次元量である。なお $r_r = \sqrt{I/A}$ 。式(13)右辺の初めのルート内はこの区間の直線流れの運動エネルギーに対する下流端を基準としたポテンシャルエネルギーの比を示し, ℓ/r_r は長柱では細長比と呼ばれる。式(12)と(13)から $K_1 = \sigma \ell^{3/2} = 2m^{3/2} K(k)$ (14)

K_1 は k の関数であるから *Elastica* と同様に分岐ダイアグラムが描ける。任意の m の $k=0$ に対応する K_1 を $K_{1m}(0)$ とすると, $K_{11}(0) = 2K(0) = \pi$, $K_{12}(0) = 2^{3/2} \pi$, \dots $K_{1m}(0) = m^{3/2} \pi$ 。これらを分岐点という。蛇行の曲がりが大きくなると流路が短絡する。蛇行中心線の短絡は $\theta_0 \approx 118.3^\circ$ であり, このとき $k = \sin \theta_0/2 \approx 0.8585$ となる。実際には流れは幅があるから, それより小さい。この最大の k を k_m とすると $K_{11}(k_m) \approx 1.358 \pi$, すなわち $K_{11}(0) < K_{1m}(k_m) < K_{12}(0)$ であり, 任意の m に対しても $K_{1m}(0) < K_{1m}(k_m) < K_{1(m+1)}(0)$ となる。蛇行が形成される範囲内の K_1 はそれぞれ $K_{11}(0) \sim K_{11}(k_m)$, $K_{12}(0) \sim K_{12}(k_m)$ \dots などであるから, K_1 の値に対し関係する曲線は1本のみである。式(8)で $\theta = 0$ (すなわち直線) は自明解である。Fig. 2 より分かるように K_1 が π を越えると $\theta = 0$ のほかに2個の解が存在する。 $K_1 \leq \pi$ のとき, 基本式の解は $\theta = 0$ で流路は直線である。よって $K_1 = \pi$ はひとつの蛇行限界を示すものである。すなわち

$$K_1 = \sqrt{\left(\frac{gA^3 \ell^3 \sin i}{12IQ^2}\right)} = \pi \quad (15)$$

となる。ただし, ここでは河床が移動床としての水理量に伴った流路形態の変化や砂州などの形成による蛇行発生への影響が考慮されていない。しかし逆に言えば河床変動などを伴わなくとも K_1 が π を越えれば蛇行の発生を示唆するものである。

次に K_1 が π を越えたある値 $K_{11}(k)$ のとき [$K_{11}(k_m)$ より小さいとする], 式(14)の対応関係にある $k = k$ のときのエネルギー F と $k=0$ のときのエネルギー F_0 とを比較してみよう。

$$F - F_0 = \alpha \int_0^s (d\theta/ds)^2 ds + \beta \int_0^s (\cos \theta - 1) ds = 2\beta S / K(k) \cdot [2E(k) - (2 - k^2) K(k)] \quad (16)$$

この右辺は負の量 ($k=0$ でゼロ) である。すなわち一般に F は F_0 より小さい。

以上によりこの研究をまとめると下記のようなになる。

- 1) 自由蛇行流の運動エネルギーと同時にポテンシャルエネルギーを考慮し, 変分学の等周問題として最小エネルギーの曲線を求めると, 水理量と関連づけた蛇行中心線の平面形状が求められた。またこれが *Elastica* の曲線と全く相似であること。
- 2) 自由蛇行流に密接な関係のある無次元量 K_1 を提案し, また蛇行の発生限界は $K_1 = \pi$ となることを示した。
- 3) 蛇行が形成される範囲内の或る K_1 のとき, エネルギー F は蛇行流の方が直線流より小さい。

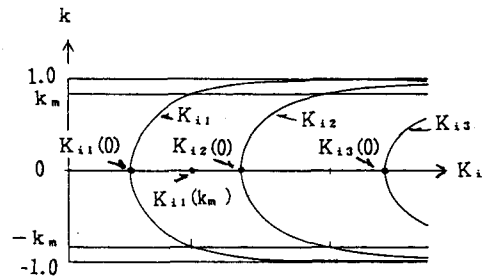


Fig. 2 分岐ダイアグラム