

II-160 浮遊粒子の飛距離と飛高について(2)

九州大学工学部 正員 大本昭恵
九州大学工学部 正員 平野宗夫
水資源開発公団 正員 松枝修治

1. はじめに

著者らは、前報¹⁾において、浮遊粒子の軌道を組織的渦運動の影響が支配的な浮上過程とその後ランダムな運動を呈しながらも平均的には下降運動を続ける流送過程に分けて取り扱い、流送過程における浮遊粒子の軌道を Basset, Boussinesq および Oseen の式を基礎式として数値計算を行なった。その際、流体と浮遊粒子に相対加速度が存在する場合に履歴効果として働く Basset 項の影響を無視するとともに、浮遊粒子に追隨した時間微分と流体に追隨した時間微分を等しいものと仮定した。後者の仮定は、浮遊粒子が常に同一の流体塊に囲まれていること、即ち、流線と浮遊粒子の軌道が一致することを前提としている。本研究は、Basset 項の効果、流体と浮遊粒子の軌道が一致しないことによる影響、さらに壁面および Slip-Shear motion による揚力の効果を考慮に入れた運動方程式を導き、浮遊粒子の軌道を追跡する数値シミュレーション法とその計算結果について述べたものである。

2. 数値シミュレーションの概要

(1) 浮遊粒子の運動方程式 目視観察によれば、浮遊粒子は河床近傍で発生した大規模な組織渦に捕捉されて上昇運動を開始し、その後、組織渦から逸脱した粒子はランダムな流体力を受けながら平均的には下降運動を続ける。相対水深が約 0.1 以下では、鉛直方向の乱れの強さは深さ方向に正の勾配を持ったため浮遊粒子に対して揚圧力として作用する。このため、河床に近づいた浮遊粒子は河床に落下することなく平行に近い運動を呈しやすく、その中で飛距離の大きい粒子は再び組織渦に捕捉され上記の軌道を繰り返す。河床近傍を浮遊する粒子の X 方向および Y 方向の運動方程式は、Basset, Boussinesq および Oseen の式に壁面効果²⁾およびせん断流において浮遊粒子と流体に相対速度のある場合 (Slip-Shear motion) に生ずる揚力を考慮すれば次式のようになる。

$$\rho_p A_3 d \frac{dU_x}{dt_p} = \frac{1}{2} \rho A_2 d^2 C_0 C_1 V_r (U_x - U_p) - A_3 d^3 \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \rho A_3 d^3 \frac{d}{dt_p} (U_x - U_p) + \rho A_2 d^2 \sqrt{\frac{3\mu}{\rho}} \int_0^{\frac{t_p d}{\sqrt{4\tau - t}}} \frac{\partial U_x (U_x - U_p)}{\sqrt{4\tau - t}} dt + F_{px} \quad (1)$$

$$\rho_p A_3 d \frac{dU_y}{dt_p} = \frac{1}{2} \rho A_2 d^2 C_0 C_2 V_r (U_y - U_p) - A_3 d^3 \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \rho A_3 d^3 \frac{d}{dt_p} (U_y - U_p) + \rho A_2 d^2 \sqrt{\frac{3\mu}{\rho}} \int_0^{\frac{t_p d}{\sqrt{4\tau - t}}} \frac{\partial U_y (U_y - U_p)}{\sqrt{4\tau - t}} dt + F_{py} + F_{py} \quad (2)$$

ここに、 (U_x, U_p) および (U_{xL}, U_{yL}) は、各々、粒子と流体の速度、 ρ_p, ρ は粒子、流体の密度、 A_2, A_3 は粒子の面積および体積に関する形状係数、 V_r は粒子と流体の相対速度の絶対値、 C_1, C_2 は壁面効果による抗力の補正係数 F_{px}, F_{py} は粒子に働く外力である。また、 $\frac{d}{dt_p}$ は流体粒子に追隨した時間微分、 $\frac{d}{dt_p}$ は浮遊粒子に追隨した時間微分である。Slip-shear motion による揚力は、Saffman により次式のように与えられている。³⁾

$$F_x = K \cdot \mu \cdot d^2 \left(\frac{1}{\sqrt{4\tau - t}} \right)^2 (U_x - U_p) \quad (3)$$

ここに、 $K = 1.615$, μ, ν は流体の粘性係数および動粘性係数である。また、浮遊粒子と流体の時間微分は、各々、次のようになる。

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_x \frac{\partial}{\partial x} + U_y \frac{\partial}{\partial y} \approx U_x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt_p} = \frac{\partial}{\partial t} + U_p \frac{\partial}{\partial x} + U_p \frac{\partial}{\partial y} \approx U_p \frac{\partial}{\partial y} \quad (4)$$

式(1)において、圧力勾配は Navier-Stokes の方程式から流体の加速度項、重力項、粘性項によって表わされる。ここでは十分に発達した乱流を対象としていることから粘性項を省略する。式(3),(4)を式(1),(2)に代入し、流速勾配を乱れの最小渦径 λ と動粘性係数によって表わし、長さスケールに水深 h 、速度スケールに摩擦速度 u_* 、時間スケールに h/u_* を用いて無次元化すると浮遊粒子の運動方程式は次のように表わされる。

$$\frac{dU_x}{dt_p} = \beta \frac{dU_x}{dt} + C_1 C_2 \beta \frac{A_2}{3A_3} \frac{\rho}{d} V_r (U_x - U_p) + \beta \left(\frac{\nu}{\lambda^2} \right)^{1/2} \int_0^{\frac{t_p d}{\sqrt{4\tau - t}}} \frac{\partial U_x (U_x - U_p)}{\sqrt{4\tau - t}} dt + \frac{2(\rho - \rho_p)}{2\rho + \rho_p} \frac{\rho \lambda \nu}{\mu} \quad (5)$$

$$\frac{dVr}{dt} = \beta \frac{dVr}{dt} + C_2 \cdot \omega \cdot \beta \cdot \frac{A_2}{3A_0} \cdot \frac{p}{d} \cdot V_r (V_L - V_p) + \beta \left(\frac{3\alpha}{4}\right)^{1/2} \left[\frac{d}{4} \frac{d(V_L - V_p)}{\sqrt{t_p - t}} \right] dt + \frac{2}{3} \beta (V_L - V_p) \frac{2Vr}{3} + \frac{K}{3\pi} \alpha \cdot \beta \cdot \frac{d}{2} \cdot (V_L - V_p) - \frac{Z(P-p)}{ZP+p} \cdot \frac{2R}{4u^2} \quad (6)$$

$$\alpha = 12 (\frac{R}{d})^2 / (4u^2 V) , \quad \beta = 3P / (2P+p) \quad (7)$$

(2). 浮遊粒子の軌道の数値シミュレーション手法 粒子の軌道を、式(5),(6)を用いて数値計算するには、入力として流体の運動特性量が必要である。流速は、時間平均成分と変動成分の和として表わす。平均流速は、対数分布則を適用する。変動成分が、一次マルコフ過程に従うものと考え、1ステップ前の流速変動が関与する成分とランダム成分との和で表わされ次のようになる。

$$u_i(t+\Delta t) = u_i(t) \cdot \rho_i^x(\Delta t) + e_i(t+\Delta t) \quad (8)$$

ここに、 Δt はステップ時間、 $\rho_i^x(\Delta t)$ は*i*方向のLag time Δt に対するLagrange的自己相関係数である。また、ランダム成分が二次元正規分布に従うものと考え、*x*方向のランダム成分 e_x と*y*方向のランダム成分 e_y の生起確率は、前者を事前確率 $P(e_x)$ とし後者を事後確率 $P(e_y)$ として次式のように表わされる。

$$P(e_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_{ex}} \exp\left(-\frac{e_x^2}{2\sigma_{ex}^2}\right), \quad P(e_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_{ey}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)} \frac{e_y - r \frac{e_y}{\sigma_{ey}} e_x}{\sigma_{ey}}\right]^2 \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ex} &= \sigma_x [1 - \{\rho_i^x(\Delta t)\}^2]^{1/2}, & \sigma_x &= \sqrt{U^2} \\ \sigma_{ey} &= \sigma_y [1 - \{\rho_i^y(\Delta t)\}^2]^{1/2}, & \sigma_y &= \sqrt{U^2} \\ r &= -(1 - \frac{1}{2}) \cdot (Uu^2 / \sigma_x \cdot \sigma_y) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$(11)$$

また、Lagrange的自己相関係数には指数分布を適用する。浮遊粒子の軌道は、式(5),(6)を基礎式として、Runge-Kutta法を用いて求めることができる。その際、各ステップにおける流速変動 u_i は式(9)に基づいて模擬乱数を生じさせ、式(8)より得られる。

3. 計算結果とその考察

図-1は、半水深から粒子を投入した場合の平均飛距離を測定値と計算値について比較したものである。縦軸は平均飛距離 \bar{L} を投入高さ z_0 で、横軸は河床から投入高さまでの間の平均流速 \hat{u} を静水中の沈降速度 w_0 で無次元化している。計算値は測定値と概ねよく一致しており、流送過程において本シミュレーション法がほぼ妥当であることがわかる。次に、粒子が河床近傍から浮上を開始し、再び河床に到達するまでの一連の過程に対する数値シミュレーションにおいては、浮上過程における組織渦の寄与は今だに不明な点が多い。ここでは、

Grassの水素気泡法による流の可視化実験の結果を参考にして、組織渦は移流速度を局所平均流速の70%、河床に対し30°方向に上昇運動を開始すると仮定した場合の初期速度が与えられている。図2、図3は上記の初期条件を式(5),(6)に適用して得られた平均飛距離と平均飛高の計算値を、各々、測定値と比較したものである。測定データのサンプル数が少ないために計算値と測定値で十分な比較はできないが、計算値は今回得られた測定値の傾向をほぼ表わしている。また、飛距離と飛高の確率分布は、測定値と計算値の両方において対数正規分布に従うことが認められた。

参考文献

- 1). 平野・大木・安藤、第40回年講
- 2). P. Vasseur and R.G.Cox, J. Fluid.Mech. 78, 385 (1977)
- 3). P.G. Saffman, J. Fluid Mech. 31, 624 (1968)

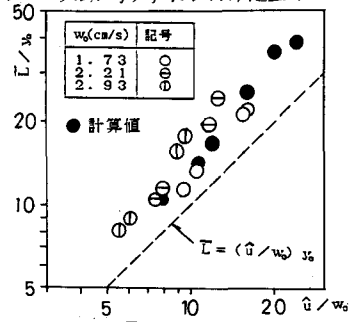


図-1 \bar{L} / z_0 と \hat{u} / w_0 の関係

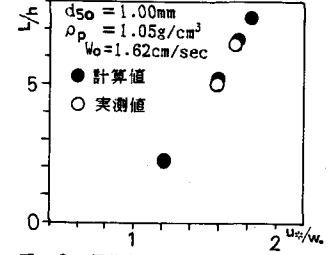


図-2 平均飛距離と摩擦速度の関係

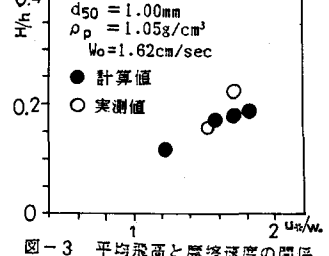


図-3 平均飛高と摩擦速度の関係