II-128 移流型物質輸送の数値計算法について

佐賀大学理工学部 正員 ○大串 浩一郎
九州大学工学部 正員 小松 利光
電力中央研究所 正員 仲敷 憲和
九州大学大学院 学生員 宇都宮 道明

1. まえがき

水域において、密度差を持たない物質の輸送問題を取り扱う際には、移流と拡散という2つの物理現象を含む偏微分方程式を解かねばならない。移流と拡散を1 time step毎に別個に取り扱うsplit-operator approach は、各processに対して最適な計算法を選択できるという利点を持っており、有力な計算法として注目されている。Holly とPreissmann は、2-point fourth order method を提案し、移流の計算において飛躍的に改善された結果を得た。しかしながら、従属変数として濃度と濃度勾配を輸送させなくてはならず、2次元では非常に煩雑なものであった。小松らは、精度の点でも計算の容易さの点でも、十分にH－P法の短所を補った6-point method を提案し、2次元問題での有用性を示した。本研究では、6-point method に基づいて、更に使用する点を減じた4-point method を開発提案し、4-point method を1次元問題に対し適用してその妥当性を検討した。

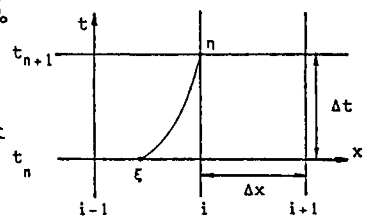
2. 特性曲線法による計算について

1次元のpure advectionの式を特性曲線法で表わすと次の様に書き換えられる。

$$\frac{dx}{dt}=U(x,t) \text{ 上で } \frac{dC}{dt}=0 \qquad (1)$$

すなわち、特性曲線上 $dx/dt=U(x,t)$ で、$C=\text{const.}$ となる。故に、図－1において、時刻 $t=t_{n+1}$ における x_i 点での濃度 C_i^{n+1} は次式で与えられる。

$$C_i^{n+1}=C_\xi^n \qquad (2)$$

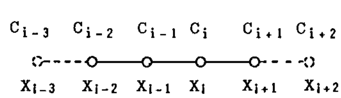


図－1 1次元問題の計算格子

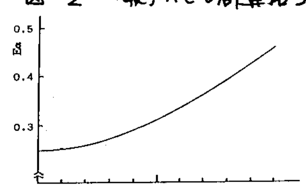
ここに、添字 i は計算格子点の場所、n は時刻を表わす指標である。また ξ は格子点 (x_i, t_{n+1}) に到る特性曲線の $t=t_n$ における x 座標を示している。そこで、既知の $t=t_{n+1}$ における格子点上の濃度を用いて、いかに C_ξ^n の値を求めるかが、決定的な課題となる。小松らは、既知の6点の濃度を用いて C_ξ^n を精度よく求める方法として、6-point method を提案した。しかしながら、境界付近の計算では境界外に計算点を2点仮定しなければならず、また2次元問題では、n+1 time step の1点の濃度の値を推定するのに、n time step の36点もの濃度を用いねばならなかった。

3. 4-point method について

(i)図－2に計算格子を示す。まず最初に、既知の4点の値を用いて外側2点の推定値を求める方法を検討する。既知の4点の値を用いて3次曲線を決定する。x_{i-2}～x_{i-1}間にあり、x_{i-2}の点からαの距離の点における3次曲線の値をC_αとし、C_{i-2}, C_α を通過する直線を用いてC_{i-3}を推定する。ここで、$\sigma=1.32$, $\Delta x=\Delta t=1$の無次元化されたGauss型濃度分布を用いてαの最適値を決定した。図－3に、推定値C'_{i-3}と真値C_{i-3}の差を2乗し、Gauss分布全体に渡って加え合わせた誤差$E\alpha$と、αとの関係を示す。C_{i-3}を推定する時に、$\alpha=0$ すなわちx_{i-2}点の勾配を用いるのが最適であることがわかる。また式の対称性より、C_{i+2}の推定についても同様な結果が得られる。



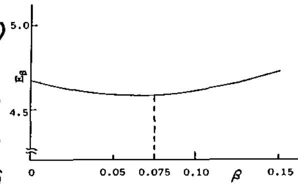
図－2 時刻nでの計算格子



図－3 最適なαの決定

(ii)次に輸送方程式より評価された濃度勾配を用い、3次曲線を構成して得られた情報から外側2点を推定する方法について考える。輸送方程式を差分化した式より、濃度勾配は次式で評価される。

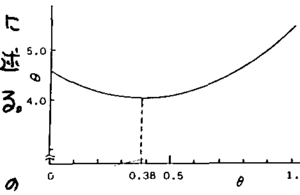
$$\frac{\partial C}{\partial x}=\frac{1}{U}\left\{-\frac{C^n-C^{n-1}}{\Delta t}+\text{拡散項の差分表示}\right\}\ \text{at}\ x_{i-2},x_{i-1},x_i,x_{i+1} \quad (3)$$



図−4 最適なβの決定

まずC_{i-3}の推定について考える。C_{i-2}, C_{i-1}また上式より求めた$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{i-2}$, $\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{i-1}$より3次曲線を求める。次に、$x_{i-2}$〜$x_{i-1}$間の点で$x_{i-2}$より$\beta$の距離の位置における3次曲線の値$C_\beta$と，$C_{i-2}$を通過する直線を用い，$C''_{i-3}$を推定する。前述のGauss分布を用いて同様に誤差を求め，さらにクーラン数の変化に対して加え合わせて、total誤差$E_{\beta i-3}$を求める。また同様に，C_{i+2}についても誤差$E_{\beta i+2}$を求める。図−4に$E_{\beta i-3}+E_{\beta i+2}$と$\beta$の関係を示す。$\beta=0.075$の時，誤差が最小となることがわかる。上述の2つの方法より求めた推定値の荷重平均から最も精度のよいC_{i-3}, C_{i+2}を推定する。

$$C_{i-3}=(1-\theta)C''_{i-3}+\theta C'_{i-3}\ ,\quad C_{i+2}=(1-\theta)C''_{i+2}+\theta C'_{i+2} \quad (4)$$



図−5 最適なθの決定

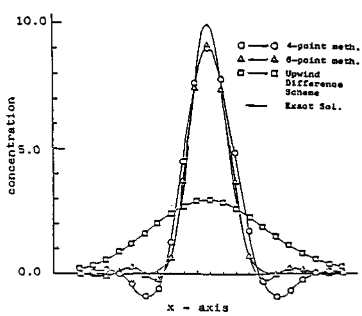
前例と同様にGauss分布を用い、誤差Θ_{i-3}, Θ_{i+2}を求める。図−5に$\Theta_{i-3}+\Theta_{i+2}$と$\theta$の関係を示す。$\theta=0.38$の時、誤差は最小となる。式(4)より求めた$C_{i-3}$, C_{i+2}を6−point methodのスキームに代入してやると、最終的な計算式は以下の通りとなる。

但し、$\varepsilon=\frac{D}{U\Delta x}$，$a=\frac{U\Delta t}{\Delta x}$，$D$は拡散係数。

$$\begin{aligned}
C_i^{n+1}=C_\xi^n= & C_{i-2}^n[(1.892b_1+b_2-0.1267b_6)-0.4875b_1\varepsilon+0.5305b_1/a]\\
&+C_{i-1}^n[(-1.273b_1+b_3+0.5700b_6)+(0.9750b_1+0.4875b_6)\varepsilon-0.04301b_1/a]\\
&+C_i^n[(0.5700b_1+b_4-1.2725b_6)+(-0.4875b_1-0.9750b_6)\varepsilon+0.04301b_6/a]\\
&+C_{i+1}^n[(-0.1267b_1+1.8292b_6)+0.4875b_6\varepsilon-0.5305b_6/a]\\
&+C_{i-2}^{n-1}[-0.5305b_1/a]+C_{i-1}^{n-1}[0.04301b_1/a]\\
&+C_i^{n-1}[-0.04301b_6/a]+C_{i+1}^{n-1}[0.5305b_6/a]
\end{aligned}$$

但し、b_1〜b_6はaの3次式で重みl，mの関数

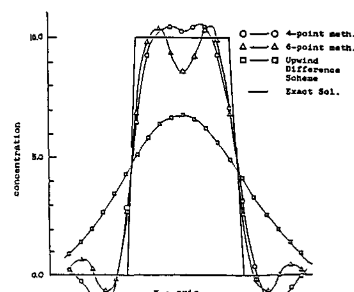
ここで、内挿式の重み$l=7.45$，$m=-13.03$は数値実験から決定された値である。



図−6 Gauss分布の移流計算結果

(iii) 4−point method の1次元問題への適用

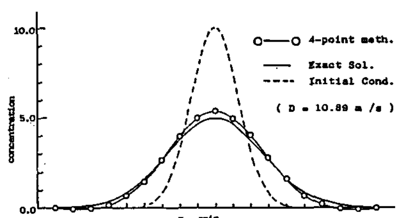
4-point methodを用いて、Gauss型濃度分布の1次元の移流について計算してみる。開水路流れを考え，流速は一定で$U=0.5$m/s，Gauss分布の標準偏差$\sigma=264$m，また$\Delta x=200$m，$\Delta t=100$sとする。図−6に$t=9600$sにおける計算結果を示す。比較のため，6-point method，風上差分を用いた結果及び厳密解を示す。差分式から得られた結果はnumerical diffusionのためdampingが著しいが、4-point methodではdampingは9.9%であり高い精度が保たれている。しかし、4-point methodでは負の値が生じその誤差は9.4%である。これは6−point methodと比べ若干大きい。また拡散物質の質量は良く保存されており，誤差は2.2%であった。図−7に台形濃度分布の移流についての結果を示す。前例同様、4-point methodは高い精度を保っていることがわかる。最後に図−8にGauss型濃度分布の移流，拡散についての計算結果を示す。ここで、$D=10.89$m²/sである。4-point methodは十分な精度を保っていることがわかる。



図−7 台形濃度分布の移流計算結果

4．結論

一次元の移流問題に対して4-point methodは，6-point methodに比べ若干の精度の低下は見られるが，6-point methodと同程度の計算精度をもたせるには，計算格子間隔Δxを0.4倍に縮少すれば良く、有効な手段であることがわかった。特に2．3次元の問題に対しては計算の容易さの点でより実用的と思われる。



図−8 Gauss分布の移流，拡散