土木学会第41回年次学術講演会（昭和61年11月）

II-127

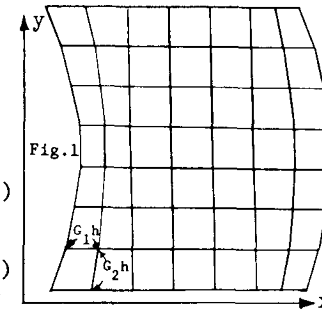
不規則境界をもつ二次元上流重み付差分法

九州産業大学　正員○加納正道
九州産業大学　正員　赤坂順三
東　和　大学　正員　空閑幸雄

1。まえがき　前報(1),(2) において不規則境界をもつ領域に対応する一次元重み付差分法（ＷＦＤＭ）のＡＤＩ法的解法ならびに二次元ＷＦＤＭを提案し、二次元中央差分型ＷＦＤＭによる解析結果が一次元中央重み付差分法とほぼ同程度の範囲で精度の高い解析が得られたことを報告した。但し、実水域の解析では、無次元流速（Ｆ）が大きく，無次元拡散係数（μ）が小さい（即ち，Ｆ／ μ が大きい）領域が演算上有利となるので、一次元重み付差分法と同様に、上流型重み付差分法が有効であろうと考えられる。そこで、本報では、不規則境界をもつ二次元上流ＷＦＤＭの提案およびその結果の一部を示す。

2。二次元上流重み付差分法　前報(2) 同様不規則領域からなる図１の対象領域における二次元上流重み付差分法を以下のように求める。二次元移流拡散方程式の基礎式(1) を満足するｘ，ｙ，ｔの多項式をｘの０～ｒ次まで求めると、その多項式群（式(2)）が得られる。いま、式(1) において原点を任意の点に移し、差分間隔を$\Delta x=G_1 h$、$\Delta y=G_2 h$、$\Delta t=k=Rh^2$ とし（本報ではG_1, G_2 は０～１の定数、Ｒは1/4)原点のごく近くを考えて$x=p_1 G_1 h$、$y=p_2 G_2 h$、$t=qRh^2$として、p_1, p_2, ｑは０、±１のような大きくない正数とする。さらに、流速と拡散係数の無次元化を式(3) とすると式(2) は式(4) と記せる。さて、図2,3 のような差分モデルをとった場合(n=5) の各点の重みP_1,....S_5 を式(2) を用いて求める。いま、図2, 3の重み付差分式は式(5),(6) で表わされる。次に前述のように、考える点に原点を移し（式(7),(8) でi=g=j=0)、式(6) でｒ＝0,1...4 の各ｒについて、各周辺点に対するp_1, p_2, ｑを代入して各点のＣを求めて、式(5),(6) に入れれば、連立方程式(7),(8) が得られる。これを解けば、各点の重みが決定できる。

3。二次元上流重み付差分法の精度　ここでは、図１の前報と同じ対象領域での二次元上流重み付差分法の精度を検討する。なお、精度は厳密解との相対誤差（Ｅ＝｜厳密解一数値解｜／厳密解）で評価する。また、精度の判定規準は、一組のF_* $(=G_1 F_x+G_2 F_y)$，μ_* $(=G_1^2\mu_x+G_2^2\mu_y)$ の値に対して算定された相対誤差の最大値E_{max} が格子間隔の４乗（$\Delta s^4=(\Delta x^2+\Delta y^2)^2$）以下になる範囲とする。前報(2) においてはＦ／μが大きい所では精度が悪くなっている。そこで、今回は図2,3 に示す上流型差分モデルを考える。ここで、４周辺の境界条件を取り入れるため、時間間隔Δt毎に図2,3 のモデルを交互に使用し、その解析結果を図４に示す。



$$\frac{\partial c}{\partial t}=d_1\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+d_2\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}-v_1\frac{\partial c}{\partial x}-v_2\frac{\partial c}{\partial y} \tag{1}$$

$$c^{(r)}(x,y,t)=\sum_{i=0}^{r/2}\left\{\frac{(x-v_1t+y-v_2t)^{r-2i}}{(r-2i)!}\cdot\frac{(d_1t+d_2t)^i}{i!}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}F_x&=v_1k/G_1h=v_1Rh/G_1,\quad F_y=v_2k/G_2h=v_2Rh/G_2\\ \mu_x&=d_1k/(G_1h)^2=d_1R/G_1^2,\quad \mu_y=d_2k/(G_2h)^2=d_2R/G_2^2\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$c^{(r)}(p_1G_1h,p_2G_2h,qRh^2)=h^r\sum_{i=0}^{r/2}\left[\frac{\{G_1p_1+G_2p_2-q(G_1F_x+G_2F_y)\}^{r-2i}}{(r-2i)!}\cdot\frac{\{q(G_1^2\mu_x+G_2^2\mu_y)\}^i}{i!}\right] \tag{4}$$

$$\begin{aligned}c(i,g,j)=&P_{0,-1}^{0}c(i,g-1,j)+P_{-1,-1}^{0}c(i-1,g-1,j)+P_{0,-1}^{-1}c(i,g-1,j-1)+P_{0,0}^{-1}c(i,g,j-1)\\&+P_{0,1}^{-1}c(i,g+1,j-1)\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}c(i,g,j)=&S_{-1,0}^{0}c(i-1,g,j)+S_{-1,-1}^{0}c(i-1,g-1,j)+S_{-1,0}^{-1}c(i-1,g,j-1)+S_{0,0}^{-1}c(i,g,j-1)\\&+S_{1,0}^{-1}c(i+1,g,j-1)\end{aligned} \tag{6}$$

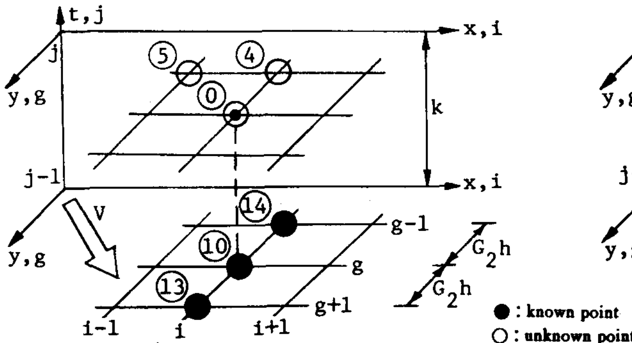


Fig.2

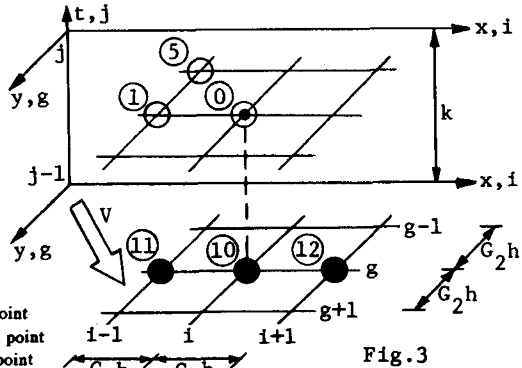


Fig.3

これによれば、二次元上流重み付差分法はＦ／μ（＝Ｐₑ＝ｖΔｘ／ｄ：セルペクレー数）が大きく、数値計算の場合に格子間隔を大きくとれて有利となる領域において精度がよい。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -G_2 & -G_1-G_2 & F_*-G_2 & F_* & F_*+G_2 \\ G_2^2 & (G_1+G_2)^2 & (F_*-G_2)^2-2\mu_* & F_*^2-2\mu_* & (F_*+G_2)^2-2\mu_* \\ -G_2^3 & (-G_1-G_2)^3 & \begin{matrix}(F_*-G_2)^3\\-6(F_*-G_2)\mu_*\end{matrix} & \begin{matrix}F_*^3\\-6F_*\mu_*\end{matrix} & \begin{matrix}(F_*+G_2)^3\\-6(F_*+G_2)\mu_*\end{matrix} \\ G_2^4 & (G_1+G_2)^4 & \begin{matrix}(F_*-G_2)^4\\-12(F_*-G_2)^2\mu_*\\+12\mu_*^2\end{matrix} & \begin{matrix}F_*^4\\-12F_*^2\mu_*\\+12\mu_*^2\end{matrix} & \begin{matrix}(F_*+G_2)^4\\-12(F_*+G_2)^2\mu_*\\+12\mu_*^2\end{matrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P^0_{0,-1} \\ P^0_{-1,-1} \\ P^{-1}_{0,-1} \\ P^{-1}_{0,0} \\ P^{-1}_{0,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -G_1 & -G_1-G_2 & F_*-G_1 & F_* & F_*+G_1 \\ G_1^2 & (G_1+G_2)^2 & (F_*-G_1)^2-2\mu_* & F_*^2-2\mu_* & (F_*+G_1)^2-2\mu_* \\ -G_1^3 & (-G_1-G_2)^3 & \begin{matrix}(F_*-G_1)^3\\-6(F_*-G_1)\mu_*\end{matrix} & \begin{matrix}F_*^3\\-6F_*\mu_*\end{matrix} & \begin{matrix}(F_*+G_1)^3\\-6(F_*+G_1)\mu_*\end{matrix} \\ G_1^4 & (G_1+G_2)^4 & \begin{matrix}(F_*-G_1)^4\\-12(F_*-G_1)^2\mu_*\\+12\mu_*^2\end{matrix} & \begin{matrix}F_*^4\\-12F_*^2\mu_*\\+12\mu_*^2\end{matrix} & \begin{matrix}(F_*+G_1)^4\\-12(F_*+G_1)^2\mu_*\\+12\mu_*^2\end{matrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S^0_{-1,0} \\ S^0_{-1,-1} \\ S^{-1}_{-1,0} \\ S^{-1}_{0,0} \\ S^{-1}_{1,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$C(x,y,t)=\exp\left((-x+v_1t)/\sqrt{d_1}+(-y+v_2t)/\sqrt{d_2}+2t\right) \quad (9)$$

４。まとめ

前報(2)に示した二次元中央重み付差分法の結果（図５）および本報の二次元上流重み付差分法の結果（図４）から、不規則境界をもつ領域においても、F_*，μ_*の広い領域において精度よく移流拡散方程式を計算できることが分かった。

参考文献

１）加納・赤坂・空閑：不規則境界をもつ二次元領域の移流分散方程式のＡＤＩ法的重み付差分法、第40回年講２部

２）加納・赤坂・空閑・川村：不規則境界をもつ二次元重み付差分法、昭和60年度西部支部年講

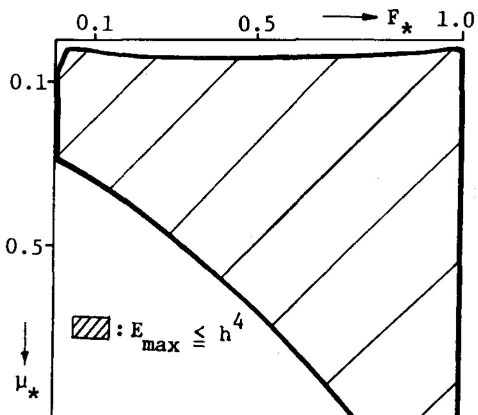


Fig.4

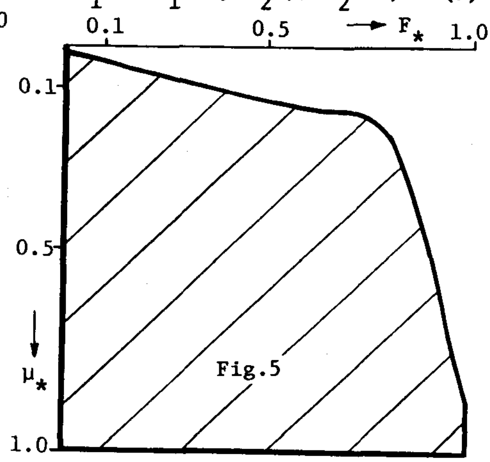


Fig.5