

II-119

マーカー表示を用いた密度成層流体の挙動の解析

中央大学理工学部 正員 中山 司  
 中央大学理工学部 正員 川原 睦人

1. はじめに

密度の違いによって流体が層を形成する現象は多く、たとえば、LNGタンク内において液温の違いによる密度差によって形成されるLNGの密度層にその例を見ることが出来る。この場合、タンク内へのLNGの補給過程において、密度の小さい層の上に密度の大きい層ができることがあり、ロールオーバー（roll-over）と呼ばれる層の逆転現象が発生する。この現象を数学的に定式化すると、上下層の接触界面が移動境界となり、その取扱いには複雑な計算アルゴリズムが要求される。そこで筆者らは、流体をマーカー（marker）と呼ばれる粒子の集合体で表現する方法を採用し、密度の違いにより異なるマーカーを用いることにより接触界面の取扱いを容易にした手法を考案した。数値解法として有限要素法を用いることにより、汎用性の高い手法が組み立てられた。

2. 基礎方程式

図1に示す2次元容器内に納められている密度の異なる2種類の流体の挙動を考える。流体の密度を  $\rho_1, \rho_2$  とし、それぞれの流体が占める領域を  $V_1, V_2$  とする。  $V \equiv V_1 + V_2$  とし、流れの場  $V$  は自由表面  $S_1$  と容器内壁  $S_2$  に囲まれているものとする。このとき、流体運動の支配方程式は次式で与えられる。

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} - \frac{1}{\rho_0} \sigma_{ij,j} + \frac{p}{\rho_0} g_i = 0 \quad V \text{ 内} \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad V \text{ 内} \quad (2)$$

ここに

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

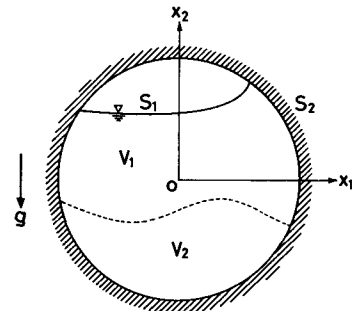


図1 2次元容器と2層流体

である。  $u_i$  は図1に示す直交座標系の  $x_i$  軸方向の流速成分を表わし、  $\rho$  と  $\rho_0$  はそれぞれ局所密度と  $V$  内での平均密度を表わす。  $g_i$  は重力項であり、  $p$  は圧力、  $\mu$  は局所粘性係数である。また、  $(\cdot)$ 、  $(\cdot)_{,i}$  はそれぞれ時間  $t$  と座標  $x_i$  に関する微分を意味する。  $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。次に、境界条件は次のようにまとめられる。

$$u_i n_i - n_2 \dot{\eta} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j = 0 \quad S_1 \text{ 上} \quad (4a), (4b)$$

$$u_i n_i = 0, \quad p_i n_i = 0 \quad S_2 \text{ 上} \quad (5a), (5b)$$

ここに  $\eta(x_1, t)$  は自由表面の形状を表わす関数である。また、境界上に立てた外向き法線を  $n$  とし、  $n_i = \cos(n, x_i)$  である。

3. 有限要素法による離散化と計算技法

支配方程式(1)と境界条件(4b)、(5a,b)は重みつき残差法を用いて重みつき残差方程式に変換される。次に、流れの場  $V$  を多数の三角形要素に分割し、要素内で  $u_i$  と  $p$  の分布を  $x_1$  と  $x_2$  の一次式で近似する。このように

して、残差方程式を離散化し、マトリックス方程式に帰着させる。このマトリックス方程式の時間積分には、速度修正法(velocity correction method)<sup>[1]</sup>が用いられ、連続の式(2)を陰的に満足しつつ、各時刻における  $u_i$  と  $p$  が計算される。これらの  $u_i$  と  $p$  を用いると、式(4a)より自由表面形状  $\eta$  が計算される。

流れの場  $V$  には、流体の動きを表現すると同時に、流体の物性を表わすために2種類のマーカーが配置される。1組のマーカー群は密度  $\rho_1$ 、粘性係数  $\mu_1$  の流体を表わし、もう1組は密度  $\rho_2$ 、粘性係数  $\mu_2$  の流体を表わす。いま、 $k$  番目の要素の中に密度  $\rho_1$  のマーカーが  $m_1$  個、密度  $\rho_2$  のマーカーが  $m_2$  個含まれているものとする。このとき、この要素  $k$  における局所密度  $\rho^{(k)}$  と局所粘性係数  $\mu^{(k)}$  を

$$\rho^{(k)} = \frac{m_1 \rho_1 + m_2 \rho_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu^{(k)} = \frac{m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2}{m_1 + m_2} \quad (6)$$

により計算し、式(1)と(3)の  $\rho$  と  $\mu$  に用いる。平均密度  $\bar{\rho}$  は、要素密度の重みつき平均値として

$$\bar{\rho} = \left( \sum_{k=1}^M \rho^{(k)} A^{(k)} \right) / \left( \sum_{k=1}^M A^{(k)} \right) \quad (7)$$

で計算する。ここに、 $A^{(k)}$  は要素  $k$  の面積、 $M$  は総要素数である。各マーカーは、その位置における流速に従って移動し、次式で座標値が計算される。

$$x_i(t_{n+1}) = x_i(t_n) + u_i(t_{n+1}) \cdot \Delta t \quad (8)$$

2層の接触界面は、2組のマーカー群の境界として認識される。

#### 4. 計算例

直径1mの2次元円形容器の上半分に密度1.2 g/cm<sup>3</sup>の重い流体、下半分に密度1.0 g/cm<sup>3</sup>の軽い流体が満たされており、その界面は水平である状態を考える。自由表面は考慮せず、流体は非粘性流体とする。この状態を初期状態とし、界面に

$$u_2 = -A \sin(\pi x_1/2) \quad t=0 \text{ で} \quad (9)$$

なる擾乱を与えたときの、上下層の逆転する様子のシミュレーション結果を図2に示す。図の左側はマーカーの分布を、右側は流速分布を示している。

#### 5. おわりに

有限要素法を用いた、2次元密度成層流体の挙動解析のための手法を報告した。流体をマーカーで表現することにより、複雑な移動境界問題を比較的容易に解析することができ、定性的に良好な計算結果を得た。

#### 引用文献

[1] M. Kawahara and K. Ohmiya, "Finite Element Analysis of Density Flow Using the Velocity Correction Method", Int. J. Num. Meth. Fluids, 5, pp.981-993, 1985.

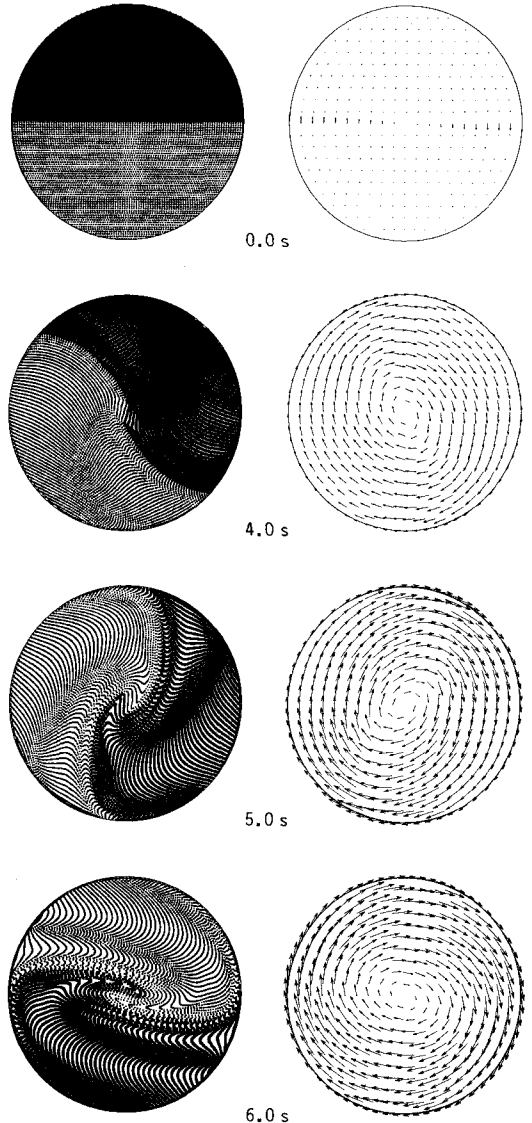


図2 密度層の逆転の数値シミュレーション