

磯熊谷組(埼玉大研究生) 正員 ○伊藤 洋
 埼玉大学 工学部 正員 佐藤 邦明
 磯熊 谷 組 正員 清水 昭男

1. はじめに

岩盤や多孔媒体における物質・溶質の移行現象を解析することは、放射性廃棄物の地層処理・処分などいろいろな問題を考える上で大切であるが、伝熱方程式や移流分散方程式の解析は、普通の差分法や有限要素法を用いると流速の増大に伴って解が振動してうまく解析できないことがよく知られている。そこで著者らは、こういった解の振動が生じにくかつ高レイノルズ数非粘性・非圧縮性流体の解析に有用性が認められている変形FLIC(フリック)法を適用し、実規模モデルの解析にも成功している。しかしながら、変形FLIC法を用いた場合の基本的な安定性と精度については特に報告していなかったため、ここにそれらを示す。

2. 変形FLIC法による解法

本論の解析に用いる基礎式は次式(1)で与えられ、放射性核種の減衰、吸着を伴う拡散方程式とする。

$$(1 + (1-n)/n \cdot \rho_s K_d) \partial C / \partial t + \text{div}(uC) = \text{div}(\tilde{D} \text{grad} C) - \lambda C \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 n : 空隙率, ρ_s : 固相の密度, K_d : 核種の吸着係数, C : 液相中の物質濃度, t : 時間, \tilde{D} : 拡散係数, u : 浸透移流速度, λ : 核種の減衰係数である。

基礎式(1)に対し変形FLIC法を適用することになるが、FLIC(Fluid in Cell)法そのものは、直交格子で分割されたCell内の流体のもつ諸量(質量, 運動量, エネルギーなど)の時間的変化を2段階に分けて計算するというものであり、流体運動を記述するLagrange, Eulerの2通りの方法の特徴を有している。変形FLIC法は、FLIC差分法を三角形領域に拡張されたものである。以下にその定式化の概略を二次元(x, z 座標系)の場合について述べる。

まず、図-1に示すように計算領域を三角形に分割し、任意の要素 j に注目する。ここに、図中 i, \bar{i} ($i=1, 2, 3$)は三角形の頂点および対辺を示す。また、 j, j_i ($i=1, 2, 3$)は三角形の重心である。そこで、式(1)を図-1の任意の閉曲線内で面積積分し、時間変換係数 $K_T(T=t/K_T, K_T=1+(1-n)/n \cdot \rho_s K_d)$ を用い、かつGaussの発散定理を適用して整理すると次のようになる。

$$\int_{S_j} \frac{\partial C}{\partial T} dS + \int_{\Gamma_j} u_n C ds = \int_{\Gamma_j} \epsilon_n ds - \int_{S_j} \lambda C dS, \begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \ell & m \\ -m & \ell \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \end{Bmatrix} = \tilde{D} \text{grad} C \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 S_j : 要素 j の領域・面積, Γ_j : 要素 j を構成する境界, u_n : 境界線上における n 方向の速度, ℓ, m : 外向法線 n の方向余弦である。

つぎに、式(1)の面積積分の段階における左辺をLagrange的微分で表し、それを前進差分で近似すると、時刻 $(n+1)\Delta T$ における中間的な濃度 C_j は次のように表せる。

$$\tilde{C}_j = C_j^{(n)} (1 - \lambda \Delta T) + \Delta T / S_j \sum_{\bar{i}=1}^3 \ell_{\bar{i}} \cdot \epsilon_{n\bar{i}} \dots\dots (3)$$

ここに、 \tilde{C}_j : 要素 j における中間的な値, $C_j^{(n)}$: 要素 j における時刻 $T=n\Delta T$ での濃度, ΔT : 時間増分, $\ell_{\bar{i}}$: 辺 \bar{i} の長さであり、図の辺上の値 $\epsilon_{n\bar{i}}$ は辺 \bar{i} を共有する2要素の平均値で表す。

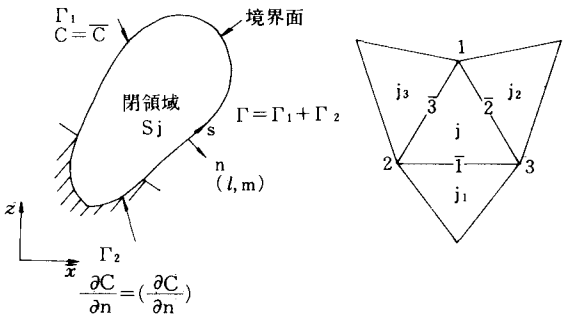


図-1 場の境界と三角形要素

つぎに、第2段階では、式(2)の左辺と式(1)左辺の Lagrange 的微分が等置であると、それを離散化して、時刻 $T = (n+1) \Delta T$ における要素 j の濃度 $C_j^{(n+1)}$ について整理すると、

$$C_j^{(n+1)} = C_j^{(n)} - \Delta T / S_j \sum_{i=1}^3 \theta_i P_i \bar{P}_i = u_{ni} [\delta_i \bar{C}_{j+1} + (1 - \delta_i) \bar{C}_j] \dots \dots \dots (4)$$

となる。ここに、 δ は上流パラメータで、 $0.5 \leq \delta \leq 1$ の値をとる。

以上が変形 F L I C 法の定式化の概要であり、境界条件としては次のようにとる。

$$C = \bar{C} \text{ on } \Gamma_1, \quad \partial C / \partial n = (\partial \bar{C} / \partial n) \text{ on } \Gamma_2 \dots \dots \dots (5)$$

ここで、 \bar{C} はその境界において既知であることを示す。

3. 安定性と精度

数値解析手法の安定性と精度を確かめるため、一次元溶質移行現象の理論解との比較・検討を行う。式(1)の一次元理論解析は、初期条件 $C(x, 0) = 0$ 、境界条件 $C(0, t) = C_0$ で次のようになる。

$$C(x, t) = \frac{2C_0}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{\phi}{2} x} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \exp(-\omega + \frac{\phi^2}{4} \xi^2 - \xi^2) d\xi \dots \dots \dots (6)$$

ここで、 $\phi = [1 + (1-n)/n \cdot \rho_s K_d] / D_{xx}$ 、

$\omega = u_x / D_{xx}$ 、 $\omega = \lambda / D_{xx}$ ととる。

数値解と理論解の比較は、図-2中の左側に示す一次元モデルを用いて行う。まず、図-2、3は式(6)において $K_d=0, \lambda=0$ で Peclet 数 ($P_e = u_{xx} \Delta x / D_{xx}$) を $P_e=10, \infty$ とした場合の解を示したものである。数値解は、解の安定・収束性を表す無次元量 Courant 数 ($C_r = u_x \Delta t / \Delta x$, Δt : 解析時間きざみ) を $0.1 \sim 0.65$ と変えて計算を行っている。これより、 $C_r > 0.5$ となると数値解はやや振動し、 $C_r \leq 0.5$ となると安定するが $C_r \approx 0.5$ のときに解の精度が最もよいことがわかる。また、 P_e が小さくなると、数値解の C_r による影響が小さくなるのが認められる。つぎに、図-4は式(1)において核種の吸着 ($K_d=0.2 \text{ ml/g}$) や減衰 ($\lambda=0.01 \text{ 1/s}$) 項がある場合で、 $P_e=10, C_r=0.5$ とした場合のそれぞれの解を示したものである。数値解は若干振動する傾向にあるが理論解とよく一致していることが判読できる。

以上、いくつかの値を与えて数値解と理論解の比較・検討を行ったが、変形 F L I C 法による解法は、 C_r をうまく選べば P_e の大きい場合にも精度のよい解を与えることが十分可能であることが確認された。

最後に、本解析に当たって助力していただいた髙熊谷組 西山勝栄氏にお礼申し上げる。

<参考文献>

- 1) 佐藤・伊藤：地下空洞周辺の伝熱に関する研究，土木学会論文集，第363号／II-4，1985.11.
- 2) Huyakorn et al. : Solution of transient transport equation using an upstream finite element scheme, Appl, Math Modelling, Vol.3, 1979. 2.

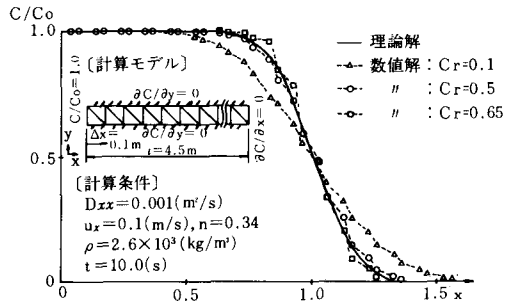


図-2 $K_d=0, \lambda=0$ で $P_e=10$ の場合の比較

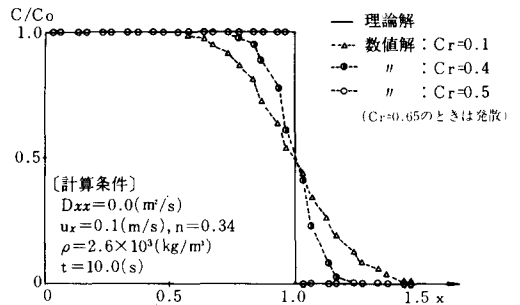


図-3 $K_d=0, \lambda=0$ で $P_e=\infty$ の場合の比較

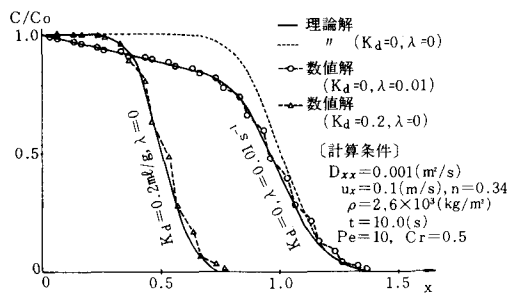


図-4 K_d および λ がある場合の比較