土木学会第41回年次学術講演会（昭和61年11月）

II-96 透水量係数の最適同定における不安定性について

室蘭工業大学　正員　藤間　聡

1．まえがき

透水量係数、貯留係数等の地下水系のパラメータ値を推定する方法は、数個所の観測井において揚水試験を行い、その結果に基づき逆問題としてその値と構造を求めることが一般的である。この場合、観測値に誤差が含まれると、物理的に許容できないパラメータ値を得ることがある。本報では、非線形最小二乗法を用いて観測地下水位から透水量係数を最適同定する際に生ずる解の不安定性について考察を加える。

2．地下水系のパラメータの同定

地下水系のパラメータを確定するには、帯水層の地質構成、成層構造、かん養量および揚水量等多数の地質学的、水文学的情報を必要とする。現在、このパラメータを推定するには、地下水流動モデルを作成し、地下水位の観測値に最も近似する水位を与えるパラメータ値を探索する方法が用いられている。

本報では上述の方法に従い、次式で与えられる定常地下水流動について解析を行う。

$$\nabla\cdot(T\nabla h) = T\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}+Q=0 \quad \cdots(1)$$

ここに、hは地下水位または地下水頭であり、Tは透水量係数、Qはかん養量または揚水量を表わす。

上式は楕円型方程式であり、中央差分法を用いて地下水流動のモデル化を行なう。

$$A_{i,j}h_{i+1,j}+B_{i,j}h_{i-1,j}+C_{i,j}h_{i,j+1}+D_{i,j}h_{i,j-1}-E_{i,j}h_{i,j}+Q=0 \quad \cdots(2)$$

$$A_{i,j}=T_{i,j}/\Delta x^2+(\partial T/\partial x)/2\Delta x,\quad B_{i,j}=T_{i,j}/\Delta x^2-(\partial T/\partial x)/2\Delta x,$$

$$C_{i,j}=T_{i,j}/\Delta y^2+(\partial T/\partial y)/2\Delta y,\quad D_{i,j}=T_{i,j}/\Delta y^2-(\partial T/\partial y)/2\Delta y,$$

$$E_{i,j}=4T_{i,j}/\Delta x^2,\ \Delta x=\Delta y$$

観測井におけるパラメータの最適推定値は、観測地下水位に対する流動モデルによる計算地下水位の誤差最小にするものと考えられる。従って、最適パラメータを探索するための評価基準として次式を採用する。

$$I(T)=\Sigma[h-\bar{h}(T)]^2 \quad \cdots(3)$$

上式中、Iは評価基準、hは観測地下水位、$\bar{h}(T)$は計算地下水位を示す。

ここで、同定すべきパラメータTに関して式(3)の最小化を行うと次式を得る。

$$\partial I/\partial T=\Sigma J'[h-\bar{h}(T)]=0 \quad \cdots(4)$$

ただし、Jはヤコビアン行列であり、添字′は転置を示す。

地下水位は透水量係数の関数形であり、式(3)は非線形となるため解を直接求めることができない。本報においては、次式で示す線形近似による反復改良法で誤差平方和を小さくする方法を採用する。

$$\bar{h}(T+\Delta T)=\bar{h}(T)+J\Delta T+O(\Delta T^2) \quad \cdots(5)$$

上式を式(4)に代入すると、反復修正量ΔTは次式で与えられる。

$$J'J\Delta T=\Sigma J'[h-\bar{h}(T)] \quad \cdots(6)$$

従って、各反復時において得られる透水量係数は次のように表わされる。

$$T=T+(J'J)^{-1}J'[h-\bar{h}(T)] \quad \cdots(7)$$

パラメータ推定値の誤差の分散、共分散からなる誤差行列をΣ_xで表示すると

$$\Sigma_x=\sigma^2(J'J)^{-1} \quad \cdots(8)$$

と定義される[1]。ここに、σ^2は地下水位の測定誤差の分散を表わす。

式(8)から、パラメータ推定値の誤差の分散、共分散を規定するものは、地下水位の測定精度、ヤコビアン行列およびパラメータの初期値の選び方に依存し、地下水位の測定値そのものには依存しないことがわかる。また、ヤコビアン行列は観測点のとり方に支配される量である。この結果から透水量係数を観測資料に基づ

き最小二乗法を用いて最適同定する場合、観測井の配置形態によっては正しく同定できない可能性が生ずる。

3．解析結果と考察

本章では、Waltonの現地試験[2]から得られた地下水頭値、透水量係数を用いて、推定誤差の分散の特性について検討する。対象帯水層は表層以下30ｍに基岩が在り、構成材料は表層がシルト、粘土であり、下層にいくに従い粒径が増加し、最下層では主に粗砂および砂利からなる。この帯水層の中央部で東西、南北方向に約３kmの正方領域をとり、各辺を300m毎に10分割し、総計121 の格子点上で透水量係数の推定を行った。

解析結果の一例を表－１に示す。この表中の透水量係数は、Waltonが示した水頭分布図から補間して得た地下水頭値に平均値０、分散4.0（cm^2）の正規乱数を観測誤差として加た初期水頭値と反復計算水頭値との絶対誤差の総和が0.1 以下の収束条件で決定したものである。この計算における絶対誤差の総和は、0.0217 ｍであり、観測水頭値と計算水頭値とはよい一致をみているにも拘わらず、得られた透水量係数は多くの地点で物理的に許容できない負の値が出現している。この原因を検討するため、表－２にヤコビアン行列の一部分を示す。ただし、同表の値は行列の各行における最大絶対値で示してある。同表中の最大値は7.53であり、この値を用いて式(8) から透水量係数の単位の誤差分散１m^2/sを与える水頭値の分散は1.76cmとなる。

この結果は、地下水位観測誤差が小さな場合であっても、観測井の配置形態によっては正確なパラメータ値の推定ができないことを意味する。一方、逆に透水量係数に大きな観測誤差または推定誤差が含まれる場合には、計算水頭値の誤差に対する応答性が一般に低いことから実用上支障のない水頭値が得られことがわかる。なお、観測水頭値に誤差を加えない場合には、本解析結果はWaltonの実測値とよい一致をみている。

以上の解析においては、透水量係数に対する水頭値の観測誤差の寄与に関して述べたが、この誤差は現地観測においては、測定器の性能、観測井の貫入度等の種々の要因によるため、その誤差解析に関しては非常に困難が伴なう。また、式(1) を用いてかん養量、揚水量を推定する場合についても、これらの諸量は各観測井間の水頭差の関数形を呈しないため、透水量係数の大きな帯水層においては正確に把握できないことになる。従って、現地に即した地下水系のパラメータを推定するには、誤差の確率的解析法が必須となる。

参考文献　1)中川　徹・小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析、東京大学出版会,p.45,1982.
2)Walton,W.C. : Groundwater Resource Evaluation,McGraw-Hill,pp.539-545,1970.

表－１　初期（観測）透水量係数と同定透水量係数(10^{-5} m^2/S)

Initial Transmissivity										
0.0238	0.0242	0.0245	0.0249	0.0254	0.0258	0.0264	0.0268	0.0273	0.0279	0.0288
0.0226	0.0231	0.0235	0.0239	0.0244	0.0249	0.0256	0.0260	0.0265	0.0271	0.0279
0.0214	0.0220	0.0225	0.0229	0.0235	0.0240	0.0247	0.0252	0.0257	0.0263	0.0271
0.0202	0.0209	0.0214	0.0220	0.0225	0.0231	0.0239	0.0244	0.0249	0.0255	0.0263
0.0189	0.0197	0.0203	0.0209	0.0216	0.0223	0.0230	0.0236	0.0241	0.0247	0.0254
0.0177	0.0185	0.0191	0.0198	0.0205	0.0213	0.0222	0.0228	0.0233	0.0239	0.0246
0.0165	0.0173	0.0179	0.0186	0.0194	0.0203	0.0213	0.0220	0.0225	0.0232	0.0238
0.0153	0.0161	0.0167	0.0175	0.0183	0.0192	0.0202	0.0221	0.0216	0.0224	0.0229
0.0141	0.0150	0.0156	0.0164	0.0172	0.0181	0.0191	0.0199	0.0205	0.0216	0.0221
0.0128	0.0137	0.0144	0.0152	0.0161	0.0170	0.0180	0.0188	0.0194	0.0202	0.0210
0.0116	0.0124	0.0132	0.0141	0.0150	0.0159	0.0169	0.0177	0.0182	0.0189	0.0196
Final Transmissivity										
0.3696	-0.1786	-0.0612	-0.0415	0.0892	-0.2706	-0.2309	0.0924	0.2880	-0.0890	0.0528
-0.3581	0.2574	0.1002	0.0791	-0.0347	0.3454	0.3075	-0.0523	-0.2596	0.1350	0.0024
0.5153	-0.2869	-0.0344	-0.0283	0.0710	-0.3199	-0.2681	0.0536	0.3211	-0.0305	-0.0086
-0.4647	0.3582	0.0621	0.0601	-0.0205	0.3573	0.3166	-0.0163	-0.2921	0.0669	0.0391
0.6413	-0.4009	-0.0212	-0.0369	0.0624	-0.3459	-0.2969	0.0099	0.3479	0.0305	-0.0451
-0.6313	0.4681	0.0406	0.0785	-0.0282	0.3699	0.3429	0.0199	-0.3145	0.0057	0.1019
0.6950	-0.4173	-0.0453	-0.0719	0.0822	-0.3807	-0.3281	0.0033	0.3792	0.0568	-0.0510
-0.5113	0.3499	0.0933	0.0885	-0.0462	0.3951	0.3667	0.0204	-0.3450	0.0332	0.0834
0.6651	-0.3409	-0.0878	-0.0821	0.1010	-0.4327	-0.3840	0.0037	0.4309	0.0089	-0.0044
-0.5149	0.2709	0.1247	0.1092	-0.0665	0.4453	0.4163	0.0429	-0.3902	0.0497	0.0787
0.6770	-0.3154	-0.1275	-0.1003	0.1050	-0.4864	-0.4437	-0.0577	0.4828	0.0466	-0.0477

表－２ $\partial h/\partial T$ の値

行	$\lvert\partial h/\partial T\rvert$
1	7.53
2	5.97
3	7.20
4	5.81
5	7.44
6	7.22
7	6.90
8	5.38
9	5.33
10	4.29
11	3.49
12	4.17
13	3.28
14	4.21
15	3.77
16	4.72
17	4.61
18	4.59
19	3.47
20	3.55
21	2.93
22	2.58
23	2.56