

II-92 成層多孔体における巨視的縦方向分散係数の推定について(その2)

室蘭工業大学 正会員 藤間 聡  
室蘭工業大学 学生員 高島 英博

1. まえがき

前報<sup>1)</sup>において、濃度積率法を用いて成層多孔体における巨視的縦方向分散係数の定式化を試みた。本報では、更に進めて透水係数分布を余弦関数で近似した場合の巨視的縦方向分散係数および断面平均濃度の定式化を行い、また室内実験において得られた測定値と比較し、その適用性を検証するものである。

2. 成層多孔体における分散過程の定式化

2-1. 断面平均濃度 トレーサの分散過程は次式で表わされる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = D_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} (D_2 \frac{\partial c}{\partial z}) \quad \dots (1)$$

ここに、 $c$  ; トレーサ濃度、 $V$  ; 浸透流速(実流速)、 $D_1$  ; 微視的縦方向分散係数、 $D_2$  ; 微視的横方向分散係数、 $x$  ; 主流方向の座標、 $y, z$  ; 主流に直角方向の座標、 $t$  ; 時間をそれぞれ示す。

(1)式の取り扱いを容易にするため、変数変換を行い無次元化すると次式となる。ただし、 $y$ 方向の分散は無視できるものとして二次元解析とする。

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + a \chi \frac{\partial C}{\partial \xi} = \psi_1 \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\psi_2 \frac{\partial C}{\partial \zeta}) \quad \dots (2)$$

$$\tau = \frac{\bar{D}_2}{h^2} t, \quad \xi = \sqrt{\bar{D}_2 / \bar{D}_1} \frac{1}{h} (x - \bar{V}t), \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad a = \frac{h\bar{V}}{\sqrt{\bar{D}_1 \bar{D}_2}}, \quad \chi = \frac{V - \bar{V}}{\bar{V}}, \quad \psi_1 = \frac{\bar{D}_1}{\bar{D}_1}, \quad \psi_2 = \frac{\bar{D}_2}{\bar{D}_2}, \quad C = \sqrt{\bar{D}_1 / \bar{D}_2} \frac{hc}{c_0}$$

ここに、 $h$  ; 全層厚、 $c_0$  ; トレーサ初期濃度、 $\bar{\quad}$  ; 全層にわたる平均値をそれぞれ示す。

(2)式の解を得ることは、トレーサを瞬間線状放出とした場合、応答関数である濃度の確率密度関数を求めることに帰着する。本報では濃度積率法を用いてこの確率密度関数を求めると次式を得る。

$$C(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}) [ 1 + \frac{\lambda_3}{6} \text{He}_3(\frac{\xi}{\sigma}) + \frac{\lambda_4}{24} \text{He}_4(\frac{\xi}{\sigma}) + \dots ] \quad \dots (3)$$

ここに、 $\sigma^2$  ; 分散(variance)、 $\lambda_i$  ;  $i$ 次キムラント、 $\text{He}(\cdot)$  ; エルミート多項式をそれぞれ示す。

2-2. 濃度積率 前節で定義した無次元濃度 $C$ の濃度積率 $C_p$ および平均値回りの濃度積率 $m_p$ をそれぞれ次式で定義する。ただし、下付き添字 $p$ は濃度積率の次数を表わす。

$$C_p = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^p C \, d\xi \quad \dots (4) \quad m_p = \int_0^1 C_p \, d\zeta = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^p C \, d\xi d\zeta \quad \dots (5)$$

(4), (5)式の関係を用いて(2)式を変形すると次式を得る。

$$\frac{\partial C_p}{\partial \tau} = a \chi p C_{p-1} + p(p-1) \psi_1 C_{p-2} + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\psi_2 \frac{\partial C_p}{\partial \zeta}) \quad \dots (6)$$

$$\frac{\partial m_p}{\partial \tau} = a p \int_0^1 \chi C_{p-1} \, d\zeta + p(p-1) \int_0^1 \psi_1 C_{p-2} \, d\zeta \quad \dots (7)$$

また、 $i$ 次キムラント $\lambda_i$ と平均値回りの $p$ 次濃度積率 $m_p$ との間に次式の関係が成立する。

$$\lambda_1 = m_1 = 0, \quad \lambda_2 = m_2, \quad \lambda_3 = \frac{m_3}{m_2}, \quad \lambda_4 = \frac{m_4}{m_2} - 3 \quad \dots (8)$$

2-3. 巨視的縦方向分散係数 成層帯水層における透水係数が余弦関数で近似できる場合の巨視的縦方向分散係数 $K_1$ の定式化を行う。巨視的縦方向分散係数 $K_1$ はトレーサ分子の分散(variance) $\sigma_x^2$ との間に次式の関係がある。

$$K_1 = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_x^2}{dt} = \frac{\bar{D}_1}{2} \frac{d\sigma^2}{d\tau} = \bar{D}_1 + a \bar{D}_1 \int_0^1 \chi C_1 \, d\zeta \quad \dots (9)$$

ここに、 $\sigma^2$  ; 無次元移動座標系 $\xi$ におけるトレーサの分散(variance)を示す。(9)式の右辺第一項は構成材料が寄与する分散に基づく微視的縦方向分散係数であり、第二項は成層が寄与する見掛上の分散による巨視的縦方向分散係数である。(6)式の解は解析的に求めることが困難であるため分散の寄与が小さいトレーサ放出直後の分散過程初期とトレーサ分子の移動が一樣になった分散過程定常期に分けて解くと各状態の $K_1$ は次式となる。

分散過程初期;  

$$K_1 = \bar{D}_1 + \frac{\bar{V}^2 \eta^2 t}{2} \dots (10)$$

ここに、 $\eta$  ; 任意定数を示す。

分散過程定常期;  

$$K_1 = \bar{D}_1 + \frac{\bar{V}^2 h^2 \eta^2}{D_2 \pi^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{\eta^2}{8} + \frac{\eta^4}{16} + \dots \right) \dots (11)$$

3. 結果および考察

本報で用いた成層帯水層は、図-1に示す透水係数分布を同図内の余弦関数で近似した水平五層帯水層であり、各層の水利諸元を表-1に示す。このモデルは総層厚 $h=50\text{cm}$ 、幅 $w=60\text{cm}$ 、長さ $l=100\text{cm}$ であり、上・下面とも不浸透面の被圧状態とした。動水勾配 $i=0.04$ で行った実験結果を用いて(10),(11)式より $K_1$ を求めると

分散過程初期;  $K_1 = 0.00495 + 0.0002t \text{ (cm}^2/\text{s)} \dots (12)$

分散過程定常期;  $K_1 = 0.00495 + 96.41 \text{ (cm}^2/\text{s)} \dots (13)$

を得た。ここで、右辺第一項は各層を構成する砂の均一帯水層で行った分散実験から最適同定した微視的縦方向分散係数の平均値である。この結果、巨視的縦方向分散係数はトレーサ放出後134時間は(12)式に従って増加し、その後(13)式の一定値になると考えられる。しかし、トレーサ放出から134時間後のトレーサ分子群の平均移動距離は約115mとなり、小規模室内実験では分散過程定常期の分散現象を測定することができないため、本解析ではトレーサ放出井から35cm離れた地点の巨視的縦方向分散係数を求める。図-2に、動水勾配 $i=0.04$ で行った分散実験から得た断面平均濃度と(3)式より求めた断面平均濃度を示す。実測値はトレーサ放出井から20cm、50cm離れた地点における断面平均濃度である。同図より地点 $x=20\text{cm}$ における計算値と実測値の間に比較的大きな差異を生ずるが、この原因としては分散実験においてトレーサを瞬間線放出する際に投入圧が加わり必ずしも矩形波状にならないことが起因すると考えられる。二地点の濃度分布から1,2次濃度積率を求め、これに基づきトレーサ放出井から35cm離れた地点の巨視的縦方向分散係数を求めると $K_1 = 0.16 \text{ (cm}^2/\text{s)}$ となり、同地点にトレーサ分子群が到達する平均時刻1400(sec)を(12)式に代入すると巨視的縦方向分散係数は $K_1 = 0.29 \text{ (cm}^2/\text{s)}$ となった。計算値は実測値の1.8倍となったがこの原因は地点 $x=20\text{cm}$ で得た濃度分布形の重心位置が右側にずれるためと考えられる。

参考文献 1) 藤間・高島; 成層多孔体における縦方向分散係数の推定について、第40回年講第II部門, 1985

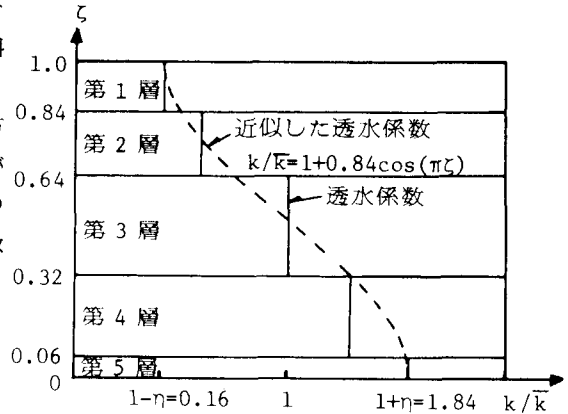


図-1 成層帯水層モデルと透水係数分布

表-1 各層の水利諸元

層	層厚 (cm)	透水係数 (cm/s)	粒径範囲 (mm)
第1層	8.0	0.03	0.15~0.30
第2層	10.0	0.10	0.30~0.40
第3層	16.0	0.25	0.40~0.60
第4層	13.0	0.36	0.60~0.71
第5層	3.0	0.46	0.71~0.85

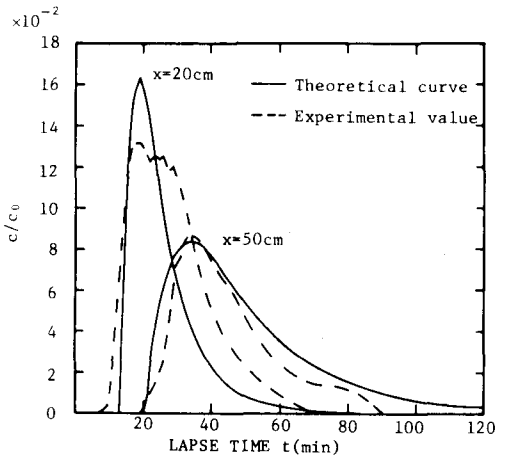


図-2 断面平均濃度