

京都大学 正員 米田 稔
 京都大学 正員 井上 頼輝
 京都大学 学生員 安西 慎

1. はじめに

透水係数などの空間分布を観測データから推定するための方法として近年様々なものが提案されてきているが¹⁾、その中でkrigingを利用する方法²⁾や多変量正規分布の性質を利用する方法^{3), 4)}では、推定量の空間的相関構造などを知ることが必要となる。このため従来、標本相関係数などを観測データより求めてプロットすることにより相関関数などを推定する方法が用いられてきた。しかしこの方法では、観測地点数が少なく不規則に分布している場合には、適用が困難になる場合がある。このためKitanidisらは透水係数などの variogramやgeneralized covarianceを最尤推定法などを用いて推定する方法を提案した⁵⁾。本研究は最尤推定法を用いて、ある盆地の不圧帯水層における透水係数の平面2次元的な分布についてその期待値、分散、相関関数を推定し、推定法の有効性について検討を加えたものである。

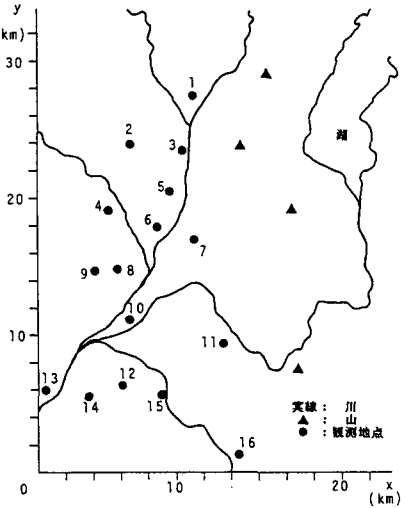


図1. 観測地点

2. 観測データおよび推定方法

ある盆地の不圧帯水層に関する透水係数の測定地点を図1に、測定値Kと測定地点の座標(x, y)を表1に示す。本研究では不圧帯水層の透水係数については鉛直方向の分布を無視し、平面2次元的な分布のみを考える。表1の測定データKの対数値Yを正規確率紙にプロットすると、図2のようにほぼ直線となり、透水係数は対数正規分布で近似できると考えられる。今、透水係数の空間分布について、対数正規分布、等方性、弱定常性を仮定すると、n個の観測データが与えられたとき、対数尤度関数は次式で与えられる⁵⁾。

$$L(Y; \theta) = -n/2 \cdot \ln 2\pi - 1/2 \cdot \ln \sigma^2 + |A|^{-1/2} \cdot \sigma^{-2} (Y - \mu)' A^{-1} (Y - \mu) \quad (1)$$

ここでYは観測値 $Y_i (i=1, 2, \dots, n)$ を要素とするn次元ベクトル、 θ は尤度関数の値を決めるパラメータベクトル、 μ はYの期待値を要素とするn次元ベクトル、 σ はYの標準偏差、Aは要素 A_{ij} を Y_i と Y_j の相関係数とするn次元正定行列である。また添字tは転置を意味する。本研究では(1)式を最大にする μ 、 σ 、そして相関関数を、Yの統計的相関構造として求める。(1)式が μ と σ^2 に関して極大値をとる条件、 $\partial L / \partial \mu = 0$ 、 $\partial L / \partial \sigma^2 = 0$ より

$$\mu = e' A^{-1} Y / e' A^{-1} e \quad (2)$$

$$\sigma^2 = 1/n \cdot (Y - \mu)' A^{-1} (Y - \mu) \quad (3)$$

ここでeは全要素が1であるn次元ベクトルである。(2), (3)式を(1)式に代入し整理すると、

$$L(Y; \theta) = -n/2 \cdot \ln 2\pi - 1/2 \cdot \ln \sigma^2 + |A|^{-n/2} \quad (4)$$

よって、(2), (3)式より、Aが求まればLの値が求まる。

行列Aの要素 A_{ij} を求める相関関数f(r)としては、2次元における正定値性を満たす必要がある⁶⁾。本研究ではこの条件を満たす関数として次の7つの式を考えた。

$$f_{1,p}(r; \alpha, \xi) = \alpha / (1 + \alpha) \cdot \delta(r) + 1 / (1 + \alpha) \cdot \{ 1 + (r/\xi)^2 \}^{-p}, \quad (p=0.5, 1, 1.5, 2) \quad (5)$$

表1. 観測データと座標

観測地点番号	x座標 (km)	y座標 (km)	K (cm/sec)	y - ln K
1	11.34	27.37	0.00142	-6.56
2	6.81	23.83	0.00409	-5.50
3	10.59	23.37	0.00170	-6.38
4	5.17	19.06	0.0178	-4.03
5	9.58	20.41	0.00610	-5.10
6	8.78	17.84	0.0334	-3.40
7	11.37	16.94	0.00494	-5.31
8	5.80	14.76	0.00452	-5.40
9	4.19	14.67	0.00261	-5.95
10	6.68	11.13	0.00300	-5.81
11	13.52	9.35	0.00452	-5.40
12	6.18	6.27	0.0120	-4.42
13	0.63	6.00	0.00199	-6.22
14	3.73	5.60	0.00494	-5.31
15	9.25	5.63	0.0226	-3.79
16	14.65	1.14	0.00300	-5.81

$$f_{2,q}(r; \alpha, \xi) = \alpha / (1 + \alpha) \cdot \delta(r) + 1 / (1 + \alpha) \cdot \exp \{ -(r/\xi)^q \}, \quad (q=1,2) \quad (6)$$

$$f_3(r; \alpha, \xi) = \begin{cases} \alpha / (1 + \alpha) \cdot \delta(r) + 1 / (1 + \alpha) \cdot \{ 1 - 3/2 \cdot (r/\xi) + 1/2 \cdot (r/\xi)^3 \}, & r \leq \xi \\ 0, & r > \xi \end{cases} \quad (7)$$

ここに r は観測地点間距離、 ξ は各式において相関の強さを決めるパラメータであり $\xi > 0$ 、また α は観測誤差の影響などによるnugget effect⁷⁾の大きさを決めるパラメータであり $0 \leq \alpha$ 、 δ はKroneckerのdeltaである。本研究では(5),(6),(7)式に示す7つの式それぞれについて、(4)式を最大にする α 、 ξ の値を α 、 ξ の推定値として非線形最大化問題として求め、(2),(3)式より μ 、 σ の推定値を求めた。

3. 結果および検討

各相関関数形について求めた α 、 ξ 、 μ 、 σ の推定値と尤度関数の最大値 L_{max} を表2に示す。今、 L_{max} が最大となる相関関数形を最終的な相関関数として採用するものとする、透水係数対数値の期待値 μ 、標準偏差 σ 、相関関数 $f(r)$ の推定値は次のように求まる。

$$\mu = -5.49, \quad \sigma = 0.93, \quad f(r) = \exp \{ -(r/3.84)^2 \} \quad (8)$$

本研究の方法の有効性を見るため、観測データから標本相関係数を求めパラメータフィッティングで相関関数を求める方法との比較を行った。図1の2つの観測地点の全ての組み合わせについて観測地点間距離 r_{ij} ($i=1,2, \dots, n, j=i+1, \dots, n$)を求め、これを1km区間ごとに分けて標本相関係数を求めた結果を図3の黒丸点で示す。ただし図3では標本相関係数の推定精度を考慮して、標本数が10以上となった点のみを示している。本研究の場合、標本相関係数として3点しかプロットできず、図3より相関関数形を推定することは困難である。なお、図3には本研究の方法で最適とされた相関関数も同時に示している。このように、観測地点数が少なく不規則に分布している図1のような場合、標本相関係数を求める方法は標本数が少なくなり、相関関数の推定が困難となるが、本研究の方法では観測地点の配置に影響されないという大きな利点がある。また本研究の方法で真の相関関数形を推定できるかどうかを見るため、 $f_{2,1}(r; 0, 5)$ の構造を持つ乱数を発生させて図1の観測地点に割りあて、これを模擬データとして推定を行い $f_{2,1}(r; \alpha, \xi)$ と $f_{2,2}(r; \alpha, \xi)$ のどちらが選択されるかを調べてみたが、 $\alpha = \infty$ となった1ケースを除き、試みた8ケース全てについて $f_{2,2}(r; \alpha, \xi)$ の方が選択された。これは尤度の大きい方が真の構造をよりよく表しているとは限らないことを示していると思われ、関数形の選択に関する不偏性の問題については今後の検討課題である。

4. まとめ

本研究では最尤推定法を用いて、ある盆地の不圧帯水層における

透水係数の期待値、標準偏差、相関関数を推定した。観測地点数が少なく不規則に分布する場合、本研究の方法は標本相関係数を用いる方法に比べ有効であると思われる。最適な相関関数形の選択の問題については今後の課題である。

(参考文献)

- 1) Yeh W.W-G.; Water Res. Res., vol.22(2), 1986
- 2) Hoeksema R.J. et.al.; Water Res. Res., vol.20(7), 1984
- 3) Dagan G.; Water Res. Res., vol.21(1), 1985
- 4) 米田, 井上, 平野; 土木学会第30回水理講演会論文集, 1986
- 5) Kitanidis P.K.; Water Res. Res., vol.19(4), 1983
- 6) Christakos G.; Water Res. Res., vol.20(2), 1984
- 7) Journel A.G. et.al.; Mining Geostatistics, Academic Press, 1981

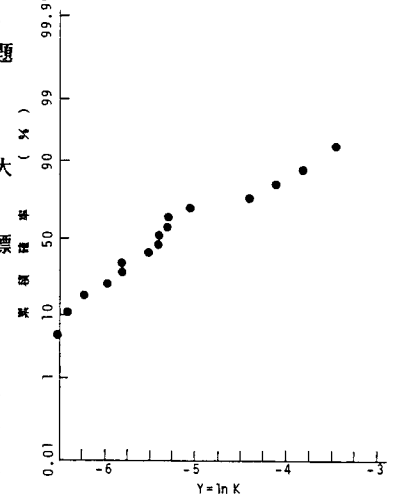


図2. 観測データのトーマスプロット

表2. 推定結果

関数形	最適 α 値	最適 ξ 値 (km)	期待値 μ	標準偏差 σ	対数尤度 L_{max}
$f_{1,0.5}$	0.00	2.60	-5.63	1.12	-20.6
$f_{1,1}$	0.00	3.66	-5.58	1.02	-20.0
$f_{1,1.5}$	0.00	4.53	-5.56	0.99	-19.7
$f_{1,2}$	0.00	5.28	-5.55	0.97	-19.6
$f_{2,1}$	0.00	2.61	-5.42	0.90	-20.3
$f_{2,2}$	0.00	3.84	-5.49	0.93	-19.0
f_3	0.00	7.49	-5.43	0.88	-19.2

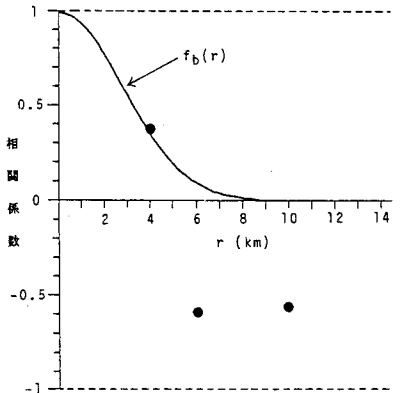


図3. 標本相関係数と最適相関関数 $f_b(r)$