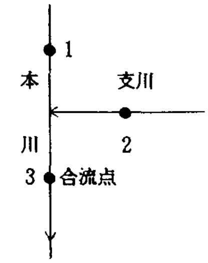
II-73　河川計画の本支川問題に関する一考察

㈱建設技術研究所　正員　栗田秀明
近畿大学理工学部　正員　江藤剛治

1．はじめに　治水計画の策定に際して，二変数の結合確率密度関数の応用が不可欠であること示唆したのは長沢である[1)]。その後，本支川の流量の同時生起性を二変数の正規分布理論により評価するとともに，上流での氾濫を考慮して，合流点の危険度を評価した石原・瀬能の研究がある[2)]。さらに，高棹・鈴木は経済分析を導入して，流域一貫した計画高水流量のありかたについて検討している[3)]。これらの研究では基本的な考え方を示しているものの，合流点の危険度を表す式は結合確率密度関数の積分形で示されており，数値積分により解が求められている。本研究では，本支川流量の結合確率密度関数として二変数指数分布を用い，幾つかの重要なケースに対して，合流点危険度の解析解が得られたので報告する。

2．理論模型　次のような仮定・記号を用いる。



①本川上流基準点１のピーク流量を本川流量と称し，ｘで表す。同様に支川基準点２のピーク流量を支川流量ｙ，合流後の本川下流基準点３のピーク流量を合流点流量ｚで表す。また，それぞれの疎通能力をx_0，y_0，z_0で表す。

②ｘ，ｙとも指数分布に従う。尺度母数をβ_1，β_2で表し，相関母数をρで表す。

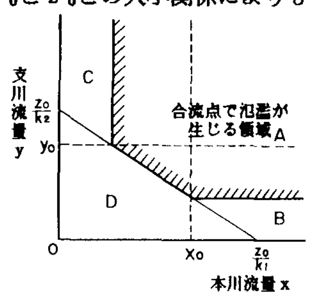
③各基準点での氾濫の有無は次式により判定する。$x > x_0$，$y > y_0$，$z > z_0$

④ｚは次式で表されるものとする。$z = k_1 x' + k_2 y'$

ここで，$x' = \begin{cases} x & \text{for } x \leqq x_0 \quad \text{(基準点1で氾濫無し)} \\ x_0 & \text{for } x > x_0 \quad \text{(基準点1で氾濫有り)} \end{cases}$　$y' = \begin{cases} y & \text{for } y \leqq y_0 \quad \text{(基準点2で氾濫無し)} \\ y_0 & \text{for } y > y_0 \quad \text{(基準点2で氾濫有り)} \end{cases}$

k_1はｚに寄与する本川流量とｘの比であり，k_2はｚに寄与する支川流量とｙの比である。

⑤上記③，④より合流後の基準点３で氾濫が生じる領域の一例を，ｘ－ｙ平面で示すと図－１のようになる。この他に，k_1x_0とz_0或いはk_2y_0とz_0との大小関係により３つの例がある。

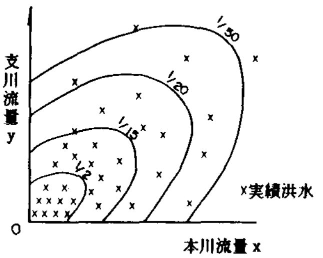


図－１　基準点３で氾濫が生じる領域（$k_1x_0 < z_0$，$k_2y_0 < z_0$の時）

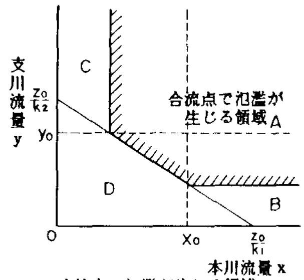
⑥基準点３で氾濫が生じる確率すなわち危険度P_{F3}は図－１で示した領域でｘ，ｙの二変数の指数分布の結合確率密度関数を積分することにより求まる（次頁参照）。

3．結果　本支川の流量の相関母数ρが$0<\rho<1$の時には，結合確率密度関数中に０次の変形ベッセル関数が含まれるために，危険度P_{F3}の算定は数値積分に頼らざるを得ないが，基準点３が最も危険に評価される場合（$\rho=1$）と，最も安全に評価される場合（$\rho=0$）については，非常に簡単な式形で理論式が得られた。本報告ではページ数の関係上，$\rho=0$の場合についてのみ理論式を次頁の式(2)，(3)に示す。また，図－２には横軸を本川上流の疎通能力と危険度，縦軸を支川の値とした時の合流点の等危険度線を示している。この図により極めて簡単に本支川の安全度の整合性を評価することができる。

〔参考文献〕　1)長沢敏夫：第14回建設省技術研究会報告，pp791～796，1961 。2)石原安雄・瀬能邦雄：第25回年講，pp195～198，1970 。3)高棹琢馬・鈴木藤一郎：第27回年講，pp421～424，1972 。



本支川流量(x,y) の
結合確率密度関数f(x,y)

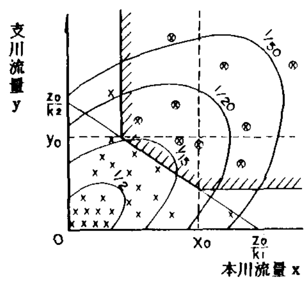


合流点で氾濫が生じる領域
（但し，$k_1x_0<z_0$，$k_2y_0<z_0$の時）

合 成

氾濫が生じる割合

$$=\frac{\text{●の数}}{\text{×と●の数}}$$



合流点の危険度P_{F3}は斜線の領域で，本支川流量の結合確率密度関数を積分することにより求まる。

$$
f(x,y)\begin{cases}
=\beta_1\exp(-\beta_1 x)\cdot\beta_2\exp(-\beta_2 y)\text{；}\rho=0\text{の時}\\[4pt]
=\dfrac{\beta_1\ \beta_2}{(1-\rho)}\exp\left\{-\dfrac{\beta_1 x}{(1-\rho)}-\dfrac{\beta_2 y}{(1-\rho)}\right\}\\[4pt]
\quad\times I_0\left(\dfrac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\sqrt{\beta_1\beta_2 xy}\right)\ \text{：}0<\rho<1\text{の時}\\[4pt]
=\beta_1\exp(-\beta_1 x)=m\beta_2\exp(-m\beta_2 y)\ \text{：}\rho=1\text{の時}
\end{cases}
$$

ここで，I_0：0次の変形ベッセル関数，$m=\beta_1/\beta_2$

積分形で表すと！

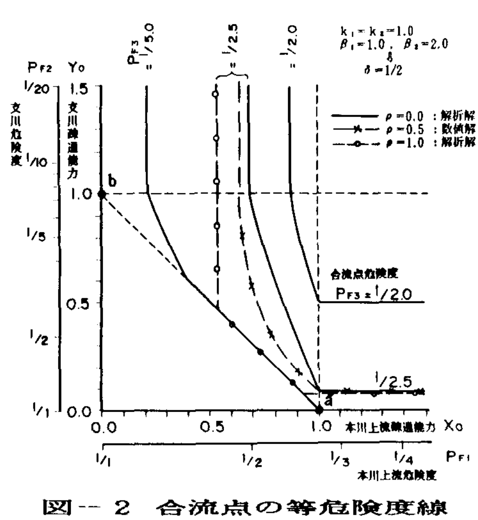
$$P_{F3}=\int_{(z0-k1x0)/k2}^{y0}\int_{(z0-k2y)/k1}^{\infty}f(x,y)dx\cdot dy+\int_{y0}^{\infty}\int_{(z0-k2y0)/k1}^{\infty}f(x,y)dx\cdot dy \quad\cdots\cdots(1)$$

例えば，$\rho=0$の場合には！*

$$P_{F3}=\frac{k_1\ \beta_2}{k_1\ \beta_2-k_2\ \beta_1}\exp\left\{-\frac{\beta_2}{k_2}z_0+\left(\frac{k_1}{k_2}\beta_2-\beta_1\right)x_0\right\}+\frac{k_2\ \beta_1}{k_2\beta_1-k_1\beta_2}\exp\left\{-\frac{\beta_1}{k_1}z_0+\left(\frac{k_2}{k_1}\beta_1-\beta_2\right)y_0\right\}\quad\cdots\cdots(2)$$

無次元化し，すぐに求まる量だけで表すと！

図 示



図－2 合流点の等危険度線

式

$$P_{F3}=\frac{1}{1-\delta}(P_{F3b})^{\{1-(1-\delta)X_0\}}+\frac{1}{1-1/\delta}(P_{F3a})^{\{1-(1-1/\delta)Y_0\}}\quad\cdots\cdots(3)$$

ここで，$X_0=k_1x_0/z_0$，$Y_0=k_2y_0/z_0$

δ ：$=k_2\beta_1/k_1\beta_2$。流域・河道の特性及び降雨の特性から推定される定数である。規模の大きい洪水では，k_1，k_2はほぼ1として扱えることから，$\delta=\beta_1/\beta_2$となり，本支川の流量の平均値の比で与えられる。

P_{F3a} ：図－2のa点での合流点危険度。a点は$Y_0=0$⇒支川からの流下量は0となり，この点の合流点危険度は本川上流流量の確率のみで評価される。
$P_{F3a}=\exp(-\beta_1 z_0/k_1)$

P_{F3b} ：図－2のb点での合流点危険度。a点と同様。
$P_{F3b}=\exp(-\beta_2 z_0/k_2)$

〔*〕・P_{F3}の式はx,yで積分するので，積分後はx,yは消える。 変わりに，積分範囲の x_0,y_0,z_0 が残る。P_F は x_0,y_0,z_0 の関数となる。
・ z_0 を所与とすると危険度は$P_{F3}(x_0,y_0)$ となり，x_0-y_0平面で$P_{F3}(x_0,y_0)$ =const. の線が描ける。〔等危険度線図〕