土木学会第41回年次学術講演会（昭和61年11月）

II-51 スプライン関数による水文時系列の逆問題

— 時間単位が大きな時系列から時間単位が小さな時系列の推定 —

パシフィックコンサルタンツ株式会社　西田　真二
北海道大学工学部　藤田　睦博

1．はじめに

降水量、日流量等の水文時系列は、処理時間Tの平滑化された系列を時間T毎にサンプリングしたもので、連続的不規則信号をサンプリングした離散的系列とは異なる。したがって逆問題として、時間単位が大きな水文時系列から小時間単位の水文時系列を推定する可能性があると考えられる。

本論文では、３次のB－スプライン関数を適用することによって、上記の逆問題を精度よく解析する手法について報告する。

2．解析手法

一般に信号 $x(t)$ の平滑化は $G_T(t)$ で表わされる。

水文時系列の場合、その核関数 $P_T(t)$ は式(2) あるいは式(3) で示される矩形パルスである。ここで式(2) は和をとる操作、式(3) は平均を求める操作を表わしている。

$$G_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_T(\tau) x(t-\tau) \qquad (1)$$

$$P_T(\tau) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq \tau \leqq T) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases} \qquad (2)$$

$$P_T(\tau) = \begin{cases} 1/T & (0 \leqq \tau \leqq T) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \qquad (3)$$

水文時系列の逆問題としては、和の系列 y_i^* が与えられて原系列 x_i を推定することになる。今、x_i 系列のサンプルサイズを2Nとし、y_i^* 系列の時間単位をT、x_i 系列の時間単位をT/2 とすれば y_i^* 系列および重複和の系列 y_i は次式で表わせる。

$$y_i^* = x_{2i-1} + x_{2i} \qquad (4)$$

$$y_i = x_i + x_{i+1} \qquad (5)$$

ここで x_i 系列を定常とすれば次式が成立する。

$$\rho_{y^*,\tau} = \rho_{y,2\tau} \qquad (6)$$

$\rho_{y^*,\tau}$ から $\rho_{y,\tau}$ の奇数項を直線式で補間すれば、y_i 系列の未知数である偶数項は $\rho_{y,\tau}$ と線形関係におくことができる。この場合、未知数 N-1個の条件式をそろえられず悪条件となるが、式(7) の最短右側インバース法によって近似解を得ることができる。

$$X^{o} = F^{T} \cdot (F \cdot F^{T})^{-1} \cdot Y \qquad (7)$$

X^{c}：最短解、n元の未知数の列ベクトル
F　：m×nの係数マトリックス
Y　：m元の定数項の列ベクトル

y_i 系列の偶数項を X^{o} ベクトルとして式(7) を適用すれば y_i 系列はすべて既知となり、式(5) に再度式(7) を適用すれば x_i 系列の近似解を得ることができる。しかし、上記の手法による解析は悪条件なため、一般に安定した解が得られない。そこで３次のB－スプライン関数による fittingを採用する。

m-1次のB－スプライン $M_{mk}(i)$ の値は、次式で示されるde Boor -Coxのアルゴリズムによって容易に計算することができる。(r=2,3,…,m)[4)]

$$M_{rj}(i) = \frac{(i-\xi_{j-r})M_{r-1,j-1}(i)+(\xi_j-i)M_{r-1,j}(i)}{\xi_j-\xi_{j-r}} \qquad (8)$$

ξ：節点の位置

この漸化式の出発値は次式で示される。

$$M_{1j}(i) = \begin{cases} (\xi_j-\xi_{j-1})^{-1} & (\xi_{j-1} \leqq i < \xi_j) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \qquad (9)$$

また、正規化された m-1次のB－スプライン関数は次式で定義される。

$$N_{mk}(i) = (\xi_k-\xi_{k-m})M_{mk}(i) \qquad (10)$$

スプライン関数による fittingは式(10)で示される正規化された m-1次のB－スプライン関数群に重みをつけた和として次式で表わせる。

$$x_i = \sum_{k=i}^{i+m-1} \alpha_k N_{mk}(i) \qquad (11)$$

いま、３次のB－スプライン関数によって x_i 系列を fittingすれば、重複和の系列 y_i に対して次式が成立する。

$$y_i = \sum_{k=i}^{i+3} \alpha_k N_{4k}(i) + \sum_{k=i+1}^{i+4} \alpha_k N_{4k}(i+1) \qquad (12)$$

式(12)の重み α を最小２乗法によって決定すれば

x_i 系列を計算できる。

ここで、注意を要する問題として“節点の位置”がある。最も単純な方法としては節点を等間隔にすればよいが、これではスプライン関数を有効に使っているとはいえない。そこで最初３つの節点を等間隔にとり、以後、残差の２乗和が最大である区間の中心に節点を追加する逐次分割法を採用する。この逐次分割法のアルゴリズムをどこで打ち止めとするかの判断は、次式で示されるＡＩＣ基準を参考に決定する。

$$AIC = N \ln Q + 2M \tag{13}$$

Ｎ：データ数、　　Ｑ：残差の２乗和
Ｍ：近似関数のパラメ－タ

３．実測の水文資料による計算例

昭和28年 5月 1日から 100日間の神流川における実測日流量より 2日流量を計算し、逆問題によって日流量を推定した例を以下に示す。

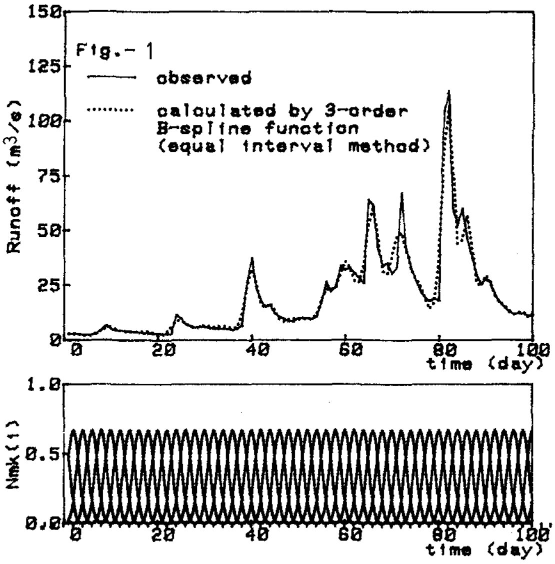
まず、式(6) の関係を使って、式(7) の最短右側インバ－ス法により重複和の系列 y_i を推定する。次に式(12)の正規化された３次Ｂ－スプライン関数により y_i 系列を fittingし、x_i 系列を推定する。

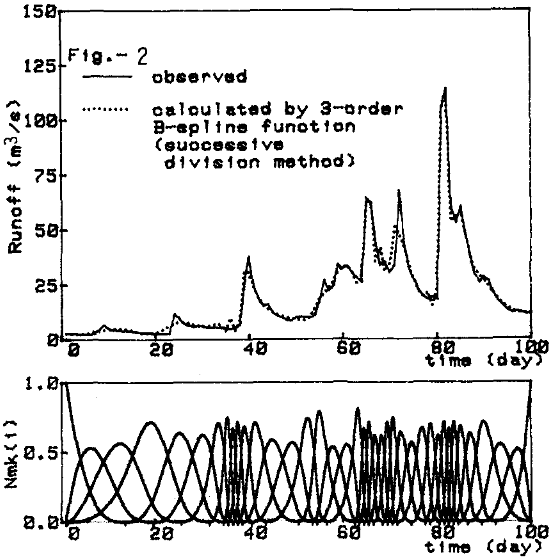
図－１は等間隔法、図－２は逐次分割法による結果である。等間隔法によれば、53個のＢ－スプライン関数群を使用しているにもかかわらず、高周波数成分を多少カットしている。これに比べ逐次分割法では39個の関数群によって高周波数成分も良く再現している。この時のＡＩＣの推移は図－３に示すとおりである。

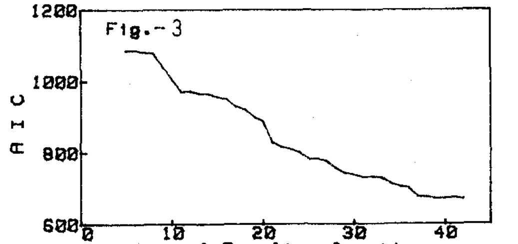
また、$\hat{x}_i$ と x_i 系列との残差２乗和によって本手法の優位性をチェックすれば、前年度に提示した最短右側インバ－ス法のみによる手法では 7,699、図－１の等間隔法では 2,871、図－２の逐次分割法では 1,285となる。

４．あとがき

和の系列 y_i^* から原系列 x_i を逆問題として解析する場合、その自己相関係数の構造を利用して一度重複和の系列 y_i を計算し、それを逐次分割法による３次のＢ－スプライン関数によって fittingすれば、安定した解を精度よく計算できる。







参考文献　1)藤田睦博：水文時系列におけるDetection Process.第19回水理講演会論文集、1975
2)福島英見、藤田睦博：降雨時系列のDetection Process.第13回自然災害科学総合シンポジウム、1976
3)西田真二、藤田睦博：スプライン関数を用いた水文時系列の逆問題、第40回年講、1985
4)市田浩三、吉本富士市：スプライン関数とその応用、教育出版、1979