

## II-48 最大エントロピー分布の諸特性の検討(その2)

信州大学工学部 正員 寒川典昭  
 信州大学工学部 正員 荒木正夫  
 信州大学大学院 学生員 大原基秀

## 1. はじめに

我々は、今まで水文頻度分析への導入を図ってきた最大エントロピー分布<sup>1)</sup>の諸特性を明らかにするため推定された確率密度関数がエントロピーを最大にすること、ラグランジュ乗数(解)の一意性について検討を行なった。また、原点にパルスをもつ分布への適用性についても触れた<sup>2)</sup>。本稿では、同分布の究極の特性をみることに重点を置き、(1) 原点にパルスをもつ分布への適用性、(2) 高次モーメント適合、(3) 極値の数の3点について検討したものである。

## 2. 諸特性の検討

## (1) 原点にパルスをもつ分布への適用性

日降水量などの頻度図のように原点における頻度が著しく大きい場合、原点についてはパルスで確率を表し、その他の部分を最大エントロピー分布で適合させ、頻度図への適用性をみた。

## (i) 理論式

連続変数  $x_1, x_2, \dots, x_N$  に対する確率密度関数を  $p(x_1, \dots, x_N)$  とすると、エントロピー  $H(x_1, \dots, x_N)$  は

$$H(x_1, \dots, x_N) = - \int \dots \int p(x_1, \dots, x_N) \ln p(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N . \quad (1)$$

また、任意関数を  $g_r(x_1, \dots, x_N)$  ( $r=1, \dots, M$ ) とすると制約条件は、

$$\int_{0+}^{\infty} \dots \int_{0+}^{\infty} p(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N = 1 - p(0, \dots, 0) = q , \quad (2)$$

$$\int_{0+}^{\infty} \dots \int_{0+}^{\infty} g_r(x_1, \dots, x_N) p(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N = E[g_r(x_1, \dots, x_N)] , \quad r=1, \dots, M . \quad (3)$$

ここで、 $E[\cdot]$  は期待値記号を表わす。この時、ラグランジュの未定乗数法により確率密度関数は、

$$p(x_1, \dots, x_N) = \exp\left\{-\lambda_0 - \sum_{r=1}^M \lambda_r \cdot g_r(x_1, \dots, x_N)\right\} . \quad (4)$$

(4)式を(2)式に代入すると、

$$\exp(\lambda_0) = \frac{1}{q} \int_{0+}^{\infty} \dots \int_{0+}^{\infty} \exp\left\{-\sum_{r=1}^M \lambda_r \cdot g_r(x_1, \dots, x_N)\right\} dx_1 \dots dx_N . \quad (5)$$

また、(3)式に代入すると、

$$\begin{aligned} & \int_{0+}^{\infty} \dots \int_{0+}^{\infty} g_r(x_1, \dots, x_N) \exp\left\{-\sum_{r=1}^M \lambda_r \cdot g_r(x_1, \dots, x_N)\right\} dx_1 \dots dx_N \\ &= \frac{E[g_r(x_1, \dots, x_N)]}{q} \int_{0+}^{\infty} \dots \int_{0+}^{\infty} \exp\left\{-\sum_{r=1}^M \lambda_r \cdot g_r(x_1, \dots, x_N)\right\} dx_1 \dots dx_N , \quad r=1, \dots, M . \end{aligned} \quad (6)$$

(5)式、(6)式より、

$$\lambda_0 = - \ln q + \ln \left\{ \int_{0+}^{\infty} \dots \int_{0+}^{\infty} \exp\left\{-\sum_{r=1}^M \lambda_r \cdot g_r(x_1, \dots, x_N)\right\} dx_1 \dots dx_N \right\} . \quad (7)$$

## (ii) 実測データへの適用例

図1(a)は、藪原の日降水量データを用いて頻度図に対する適合度を1変数について検討したものである。また、図1(b)に同じデータに従来の方法で適用したものを示した。これより、従来の方法に比べ適合度が改善され、このような分布形に対して、よい適合度が得られることがわかった。

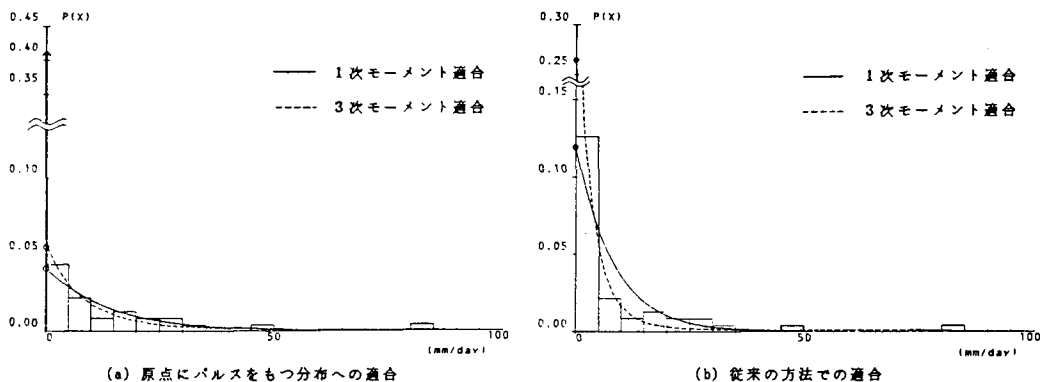


図1. 藪原における 9月15日の日降水量の頻度図と最大エントロピー分布

(2) 高次モーメント適合について

高次モーメント適合は、高次モーメントのもつ誤差はあるが、ここでは最大エントロピー分布がどこまで頻度図に対応できるかを検討した。図2はパルスを用いた方法で藪原の日降水量の頻度図に対し高次モーメント適合を行なったものである。これより当然のことながら高次になる程、適合度がよくなり、頻度図の細部に対し反応が鋭敏になることがわかった。

(3) 最大エントロピー分布の極値の数について  
推定される確率密度関数 $p(x_1, \dots, x_N)$ は一般に、

$$p(x_1, \dots, x_N) = \exp\{-1 - \sum_{r=1}^M \lambda_r \cdot g_r(x_1, \dots, x_N)\} \quad (8)$$

となる。(8)式を $x_i$ で偏微分し0とおくと、

$$\frac{\partial p(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_i} = \exp\{-1 - \sum_{r=1}^M \lambda_r \cdot g_r(x_1, \dots, x_N)\} \{-\sum_{r=1}^M \lambda_r \frac{\partial g_r(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_i}\} = 0 \quad (9)$$

ここで、 $\exp\{-1 - \sum_{r=1}^M \lambda_r \cdot g_r(x_1, \dots, x_N)\} \neq 0$  より、

$$-\sum_{r=1}^M \lambda_r \frac{\partial g_r(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_i} = 0 \quad (10)$$

故に、 $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N$ が固定された時の $x_i$ の数が $x_i$ 方向の極値の数となる。図3はこれを1変数についてモーメントを制約条件とし、人為的に作った頻度図に適合し視覚的に表わしたものである。

3. あとがき

本稿は、最大エントロピー分布の究極の特性をみることを主目的とした。今後は多変数での頻度図への適用、 $g_r(\cdot)$ の与え方などを検討していきたい。最後に本研究を行なうにあたり協力願った信州大学大学院生森川智君に謝意を表す。

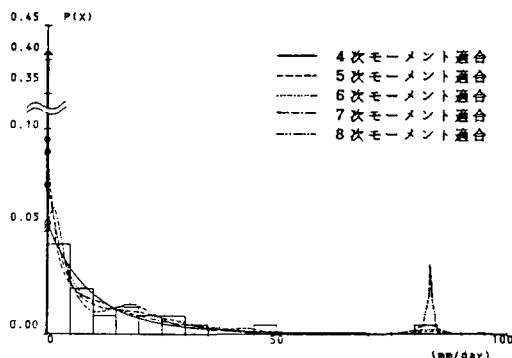


図2. 藪原における 9月15日の日降水量の頻度図に対する最大エントロピー分布の高次モーメント適合

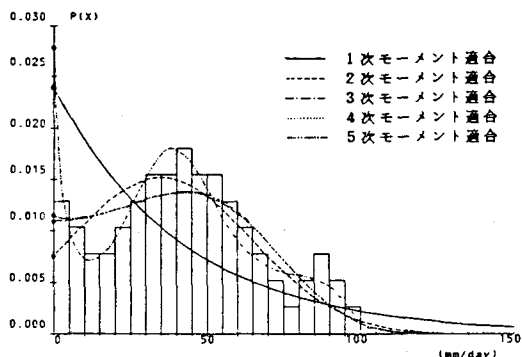


図3. 最大エントロピー分布の極値の数

1) 例えば、寒川, 荒木: 水文事象の頻度分析へのME P導入について, 土木学会論文報告集, No. 335, 1983. 7.  
2) 荒木, 寒川, 大原: 最大エントロピー分布の諸特性の検討, 60年度中部支部研究発表会講演集, 1986. 3.