# II-46 Probability Weighted Moment法のガンベル分布への適用例
## ～実データを用いて～

山梨大学工学部 学生員 土屋 一仁
山梨大学工学部 正 員 竹内 邦良

## 1．はじめに

現在、大雨、洪水の確率評価のため、多種の分布関数が適用されている。江藤ら(1985)は、これ等の分布関数では何千年、何万年確率もの評価をされる大雨、洪水が頻繁に生起していることになることを指摘し、新しい分布関数として、江藤(1985)が提案した平方根指数型最大値分布を適当なものとして、大雨に対して適用した。

ところで、分布関数のパラメータの推定方法としては従来、積率法、最尤法、等が用いられているが、Greenwood(1979) は、Probability Weighted Moment 法( 以下 PWM法 )を提案し、従来の手法に比べ小資料であっても、バイアスの小さな推定値が得られることを示した。このことは冒頭の過大な平均再帰間隔が推定されるという問題の原因が、分布関数自体にあると同時に、その適用方法にもあることを示しているということができる。本論文では、大雨、洪水の実データに対しガンベル分布に最尤法、 PWM法、平方根指数型最大値分布に最尤法を適用して最大値の平均再帰確率を比較した。

## 2．各種分布関数、及び PWM法の定義

ガンベル分布、平方根指数型最大値分布は、それぞれ下式で示される。

○ガンベル分布

$$F(x)=\exp\left[-\exp\left\{-(x-m)/a\right\}\right] \qquad (-\infty<x<\infty) \qquad (a>0) \tag{1}$$

○平方根指数型最大値分布

$$F(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ \exp\left\{-\lambda(1+\sqrt{\beta x})\exp(-\sqrt{\beta x})\right\} & (x>0) \qquad (\lambda>0,\ \beta>0)\end{cases} \tag{2}$$

以下に PWM法を紹介する。Probabirity Weighted Moment $M_{\ell,j,k}$ は、(3) 式のように定義される。

$$M_{\ell,j,k}=E\left[X^{\ell}F^{j}(1-F)^{k}\right] \tag{3}$$

ここに、$\ell,j,k$ ：実数、F ：非超過確率、E［・］：期待値演算子である。$\ell,j,k$ が整数の場合には$M_{\ell,j,k}$ は (4)式のようになる。

$$M_{\ell,j,k}=B(j+1,k+1)\ E\left[X^{\ell}_{j+1,j+k+1}\right] \tag{4}$$

ここに、B( , )：ベータ関数、E［・］：標本数(k+j+1) 個の中に存在する(j+1) 番目の順序統計量の 次の期待値である

$\ell=1, j=0$ の場合特に、$M_{1,0,k}=M(k)$ と書く。M(k) の推定値としては (5),(6)の２式が考えられる。

$$\overline{M}(k)=\frac{1}{n}\Sigma X_i\left\{\binom{n-i}{k}\Big/\binom{n-1}{k}\right\} \tag{5}$$

$$\overline{M}(k)=\frac{1}{n}\Sigma X_i\left[(N-i+\alpha)/N\right]^{k} \tag{6}$$

(5)式は (3)式におけるＦをＮ個のサンプルを持つ標本集団から（k+1)個のサンプルを持つ標本集団を抽出したときの最小値がXiである抽出総数から算定してM(k) を推定するもの、(6)式はＦにいわゆる経験確率 Plotting Position公式を利用するものである。以上から理論値M(k) が推定値$\overline{M}(k)$ に等しいと考えパラメータを推定する方法が PWM法である。尚、今回のαには0.35 (Stipp & Young(1971)) を採用した。

## 3．実データに対する適用

Table 1 に推定された最大値の平均再帰間隔（確率年）を示した。最尤法と PWM法 (5)式で用いた場合ではルーズベルト、ポズナン流量をのぞき最尤法による確率年を PWM法が上回る結果が

でた。(6)式を用いた場合では逆に大幅に下回り、平方根指数型最大値分布により推定された確率年に近い結論を得た。なお、今回は平方根指数型最大値分布を大雨のみでなく洪水に対しても適用してみたが、元来この分布関数は一雨総雨量の頻度解析の目的でモデル化された平方根k分布をもとに導かれた極値分布である。

Table 1　　List of Return Periods

(Year)

| | Distribution | Gumbel | | | SQRT-ET-max | Data Number |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Method | MxL | PWM(1) | PWM(2) | MxL | |
| (Streamflow) | Roosevelt | 863 | 393 | 275 | 77 | 71 |
| | Poznan | 1056 | 744 | 370 | 182 | 50 |
| | Miomote | 66 | 81 | 41 | 36 | 31 |
| | Koto | 26 | 35 | 23 | 17 | 31 |
| | Okiura | 599 | 1199 | 205 | 180 | 24 |
| (Rainfall) | Roosevelt | 458 | 630 | 310 | 122 | 63 |
| | Miomote | 129 | 313 | 114 | 48 | 31 |
| | koto | 130 | 302 | 70 | 67 | 26 |
| | Okiura | 157 | 250 | 85 | 60 | 24 |

PWM(1)　Ｍ（ｋ）の推定に（５）式を用いたもの

PWM(2)　Ｍ（ｋ）の推定に（６）式を用いたもの

## ４．結論及び今後の課題

今回の実データへの適用では、用いた資料が少ないので早計に結論として断定することはできないが、以下のような事実が認められたのでそれを列挙する。

1)平方根指数型最大値分布により推定される各データ中の最大値の Return Periodはパラメータの推定方法のいかんにかかわらず、ガンベル分布のそれよりも小さかった。降水量に対するこの事実は江藤らにより示されている。それが流量に対しても認められたのは、平方根指数型最大値分布がガンベル分布より長く尾を引くという、数学的モデルの性質が顕著に現われているためであろう。

2) PWM法によりM(k) を求める際、どのような形のＦｉ を用いるかによって、推定されるパラメータは大きく違ってくる。理論上バイアスを持つ Plotting Position公式(6) を用いるものより、不偏推定公式(5) を用いるほうが、最大値の Return Periodは 1.5倍～ 6倍近くになっている。無論これらの差異は検定を行なった上で有意であるかどうか論ぜられるものである。しかし、推定法のこの部分だけの差異でもこのように推定値が大きく違うことは注目に値する。

3)ガンベル分布に最尤法と (5),(6)式による PWM法を適用して比較したが、 Return Periodは大幅に違ったものとなったこのことから大雨・洪水の分布関数の適用には関数の選択の問題と同様に、パラメータ推定にいかなる手法を選ぶべきかということが同程度に重要ということが分かった。

これからの課題としては、

1)平方根指数型最大値分布に対しての PWM法適用

2)分布関数に PWM法を適用するとき用いるべきＦｉ の検討

等が上げられる。

参考文献

1)江藤・室田(1984)：土木学会論文集Ⅱ、第 345号、pp.101-109。
2)江藤(1985)：第40回年次講演会第２部、pp13-14
3)江藤・室田・米谷・木下(1985)：大雨の頻度（未発表）
4)Greenwood & Matalas (1979): W.R.R., 15(5), pp.1049-1054
5)Landwehr, Matalas & Wallis (1979): W.R.R., 15(6), pp.1055-1064
6)Stipp & Young (1971): Proc,ASCE 97(HY1),PP.219-222