II-45

ガンマ分布型へのSextile法の適用

北海道開発局土木試験所　正員　星　　清

1. 概　　説 Jenkinson[1]は一般化極値分布の3母数推定法としてsextile法を提案している。この手法の特徴は積率法においてしばしば問題となる高次の積率におけるサンプリングエラーをおさえることができ、したがって、異常値の母数推定に及ぼす影響を除去できる点にある。前報[2]においてはガンマ分布族（ピアソン3型分布、対数ピアソン3型分布等）の新しい母数推定法として、quantile法を紹介したが、本報告ではとくに、sextile法をピアソン3型分布(P3分布)に適用する方法について述べる。また、確率水文量推定精度をモンテカルロ法により新しい手法と従来からの母数推定法間で比較する。

2. 基礎理論　　sextile法の基本的考え方は、まず確率密度関数下の分割面積が6分の1になるように等分し、分割区間の6個の平均値($\nu_1, \nu_2, .., \nu_5, \nu_6$)を算定する。次に、この6個の統計量の平均値($\mu_\nu$)、標準偏差($\sigma_\nu$)、差の比($\ell = (\nu_2 - \nu_1)/(\nu_6 - \nu_5)$)から分布母数を推定しようとするものである。この手法の概念図を図－1に示す。以上の考え方をもとに、P3分布の3母数を推定するための理論展開を以下に行う。
P3分布の尺度、形状、位置母数をそれぞれ、a，b，cとすれば、P3分布に従う変量 x は(1)式で与えられる。ここで、w は標準ガンマ変量であり、形状母数bのみの関数で、その密度関数は(2)式で定義される。ここで、$\Gamma(b)$ はガンマ関数である。標準ガンマ分布の分割区間境界値 w_i とその区間平均値 ν_i はそれぞれ、(3)、(4)式で計算される。ここで、$\gamma(b,w_i)$ は第1種不完全ガンマ関数である。したがって、ν_iの平均値(μ_ν)、分散(σ_ν^2)、および比(ℓ)はそれぞれ、(5)、(6)、(7)式で計算される。なお、μ_ν，σ_ν，ℓ はすべてbのみの関数である。P3分布についても、等分割した6個の平均値をそれぞれ、$y_1, y_2, y_3, ..., y_5, y_6$ とし(1)式の線形性を利用すれば、y_iとν_iの間には(8)式が成立する。したがって、y_iの平均値(μ_y)、分散(σ_y^2)、および差の比(ℓ)はそれぞれ、(9)、(10)、(11)式で与えられることがわかる。
実測値にP3分布をあてはめ、母数をsextile法によって推定するための計算手順を以下に要約して示す。
(A) 水文資料を大きさの順に並べかえ、標本数が等しい6グループにデータを分割する。各グループの標本数を等しくできない時は、サンプリングエラーを小さくするために大きい方のデータグループの標本数を増してやるのが得策である。

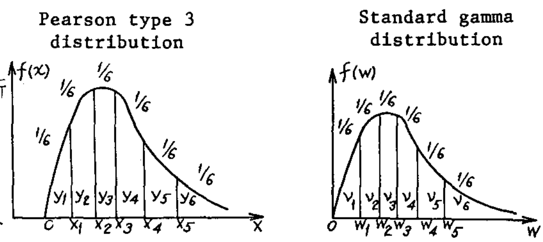

Fig. 1 Schematic diagram of sextile method

Table 1 Summary of Equations

$$x = c + a\,w \qquad (1)$$

$$f(w) = w^{b-1}\exp(-w)/\Gamma(b) \qquad (2)$$

$$i/6 = \gamma(b,w_i)/\Gamma(b) \qquad (3)$$
$$(i = 1,2,...,5,6)$$

$$\nu_i = 6\{\gamma(b+1,w_i) - \gamma(b+1,w_{i-1})\}/\Gamma(b) \qquad (4)$$
$$(i = 1,2,...,5,6)$$

$$\mu_\nu = \sum_{i=1}^{6} \nu_i/6 = b \qquad (5)$$

$$\sigma_\nu^2 = \sum_{i=1}^{6} (\nu_i - \mu_\nu)^2/6 = g(b) \qquad (6)$$

$$\ell = (\nu_2 - \nu_1)/(\nu_6 - \nu_5) = h(b) \qquad (7)$$

$$y_i = c + a\,\nu_i \qquad (8)$$

$$\mu_y = c + a\,\mu_\nu = c + a\,b \qquad (9)$$

$$\sigma_y^2 = a^2\sigma_\nu^2 \qquad (10)$$

$$\ell = (y_2 - y_1)/(y_6 - y_5) = (\nu_2 - \nu_1)/(\nu_6 - \nu_5) = h(b) \qquad (11)$$

where

$$\mu_y = \sum_{i=1}^{6} y_i/6 \qquad (12)$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{6} (y_i - \mu_y)^2/6 \qquad (13)$$

$$a = \sigma_y/\sigma_\nu \qquad (14)$$

$$c = \mu_y - a\,b \qquad (15)$$

(B) 各グループの平均値 y_i (i = 1,2,...,6)を求め、(11)、(12)、(13)式により ℓ, μ_y, σ_y の標本統計量を計算する。

(C) (11)式により、ℓ が与えられると形状母数 b が推定され、さらに、(6)式を用いて σ_y が計算される。なお、(6)、(7)式の $\sigma_y = g(b)$ と $b = h^{-1}(\ell)$ に多項式をあてはめておくと実用上計算が容易となる。

(D) 尺度母数 a と位置母数 c はそれぞれ、(14)、(15)式により容易に推定される。

Table 2 Ratios of the Root Mean Square Error of Various Quantile Estimators to the True Quantile with C_v = 0.5

Fitting method	rmse($\hat{x}_p$)/x_p					
p	0.01	0.10	0.50	0.90	0.99	0.998
N = 20:						
Method 1	0.7903	0.2228	0.1251	0.1279	0.1796	0.2126
Method 2	1.0137	0.2653	0.1305	0.1262	0.2022	0.2676
Method 3	0.6715	0.2189	0.1216	0.1276	0.1795	0.2123
Method 4	0.6791	0.2191	0.1217	0.1275	0.1797	0.2130
Method 5	0.7099	0.2204	0.1358	0.1333	0.1744	0.2061
N = 40:						
Method 1	0.6507	0.1572	0.0914	0.0932	0.1437	0.1756
Method 2	0.7490	0.1755	0.0939	0.0923	0.1544	0.2008
Method 3	0.4609	0.1492	0.0881	0.0947	0.1431	0.1716
Method 4	0.4733	0.1489	0.0872	0.0933	0.1365	0.1618
Method 5	0.5372	0.1541	0.0923	0.0932	0.1363	0.1645
N = 80:						
Method 1	0.5283	0.1140	0.0677	0.0641	0.1058	0.1321
Method 2	0.5582	0.1196	0.0690	0.0637	0.1098	0.1415
Method 3	0.3275	0.1082	0.0645	0.0677	0.1095	0.1330
Method 4	0.3462	0.1055	0.0630	0.0644	0.0972	0.1160
Method 5	0.3892	0.1074	0.0654	0.0650	0.0963	0.1153

3. 適 用 例　前報[2)]に引き続き、P3分布の新しい母数推定法であるsextile法と既往の推定法とで比較する。評価方法は前報とまったく同一であるので、ここでは詳しくは述べない。モンテカルロ法により2母数ガンマ分布(P2)に従う乱数を発生させ、種々の確率レベルに対する確率水文量推定値のroot mean square errorの大小によって母数推定法を比較する。表－2はその結果の1例であり、水文統計解析で一般的に起り得ると考えられる変動係数、C_v が 0.5 で歪度が 1.0の母集団特性値が設定されている。標本数は N = 20, 40, 80 の3ケースであり、確率レベル p は表中に示される 0.01 から 0.998までの6種類である。x_p は各々の確率レベルに対応するP2分布の確率変量真値で、rmse($\hat{x}_p$) は x_p の推定値を2500個発生させたときのroot mean square errorの値である。P3分布の3母数に5推定法を適用する。すなわち、Method 1は積率法で、標本歪度を$\sqrt{N(N-1)}/(N-2)$ で補正する方法、Method 2は同じく標本歪度をBobée―Robitaille法[3)]で補正する。Method 3では位置母数c をquantile法で推定し、他の母数推定に最尤法を適用する。Method 4はquantile法と2次までの積率を併用する方法である。Method 5はsextile法による母数推定法である。P3分布について提案されている歪度補正式を用いたMethod 2は推定精度が必ずしも良いとは言えない。とくに、分布両端での確率水文量推定精度が他の方法に比べて劣っている。P3分布の新しい母数推定法であるquantile法とsextile法のperformanceはほぼ同程度であり、確率レベルの大きいところで推定精度が積率法に比べて高い。本報告では、sextile法のP3分布適用例のみをかかげたが、対数ピアソン3型分布の母数推定にquantile法同様sextile法も適用可能である。両計算手法は余り複雑ではなく、今後は実用面での運用を図っていきたい。

参 考 文 献

(1) Jenkinson, A.F.: Estimation of maximum floods, World Meteorological Office, Technical Note 98, Chapter 5, pp.183-257, 1969.

(2) 星　清：ガンマ分布型へのクオンタイル法の適用、第40回年次学術講演会講演集、pp.1- 2、1985.

(3) Bobée, B. and Robitaille, R.: Correction of bias in the estimation of the coefficient of skewness, Water Resources Research, 11(6), pp.851-854, 1975.