

I-538 有限要素法によるスロッシングの解析

中央大学 学生員 オラマスフミ

中央大学 正 員 川原睦人

1. はじめに

スロッシングは、容器内の、自由表面を有する流体が、容器を加振されることによって生ずる現象である。本論文では、ピッチング運動を行なう容器内のスロッシングの解析をラグランジュ型有限要素法を用いて行なった。ここで提案した方法は、自由表面の境界形状の変化の取り扱いを容易に取り入れることのできる解析手法である。このため、一般的に自由表面をもつ流れに適応することができる。

2. 基礎方程式

図1に示すような二次元タンク内のスロッシングを考える。座標系は図に示すように、右向きに x 軸を、鉛直上向きに y 軸をとる。流れの場全体を V とする。このとき、 V における支配方程式は次の Navier-Stokes 方程式の運動方程式と連続方程式である。

$$Du_i/Dt = -P_{,i} + (1/Re)(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + f_i \quad V \text{ 内} \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad V \text{ 内} \quad (2)$$

ここで u_i , P は、それぞれ流速と圧力を表わし、 Re , f_i はレイノルズ数及び物体力を表わす。流れの場 V は2種類の境界 S_1 と S_2 によって囲まれているものとする。自由表面境界 S_1 では応力のつりあい条件により次式が与えられる。

$$[-p\delta_{ij} + \tau(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j}] \cdot n_j = 0 \quad S_1 \text{ 上} \quad (3)$$

残りの境界 S_2 上では、流速が与えられているものとする。すなわち

$$u_i = \hat{u}_i \quad S_2 \text{ 上} \quad (4)$$

式(1)の左辺をラグランジュ的に見直せば、それは流体粒子の流速の時間的な変化に等しいから次のように近似することができる。

$$Du_i/Dt \doteq (u_i^{n+1} - u_i^n)/\Delta t \quad (5)$$

ここで u_i^{n+1} と u_i^n は、次のように定義される。

$$u_i^n \equiv u_i(x_i^n, n \Delta t) \quad ; \quad u_i^{n+1} \equiv u_i(x_i^{n+1}, (n+1)\Delta t) \quad (6,7)$$

3. 時間積分法

時間積分法として流速修正法を用いて計算する。 n 回目の流速及び圧力 u_i^n , P^n を用いて u_i^{n+1} , P^{n+1} を求めることを考える。その計算手順は次のようになる。

$$\bar{u}_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t [(1/Re)(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,j} - P_{,i}^n + f_i^n] \quad (8)$$

$$u_i^{n+1} = \bar{u}_i^{n+1} + \phi_{,i} \quad (9)$$

$$\phi_{,ii} = -\bar{u}_{i,i}^{n+1} \quad ; \quad \phi_{,i} n_i = 0 \quad S_2 \text{ 上} \quad ; \quad \phi = 0 \quad S_1 \text{ 上} \quad (10, 11, 12)$$

$$P_{,i}^{n+1} = P_{,i}^n - \phi_{,i}/\Delta t \quad (13)$$

$$u_{i,i}^{n+1} = 0 \quad (14)$$

式(8, 9, 12, 13)について Galerkin法を適用することにより有限要素方程式を得ることができる。

4. 数値解析例

前節で紹介した定式化に基づいて作成した計算プログラムのチェックを行なうために、二次元矩形剛

体容器内の流体の微小振幅の自由振動を計算した。計算には振幅1.0, 水深1.0の容器を使用した。自由表面の初期形状として振幅0.01の逆対称一次のモードを与え、重り粘性係数 $\nu=0.0$ と $\nu=0.01$ を用いて計算を行なった。容器両側壁($x_1=\pm b$)における波高 η のその後の時間変化をそれぞれプロットしたものが図2, 図3である。計算結果が解析解と良く一致している。

次に、図1に示す容器が座標系の原点0のまわりに角速度 $\Omega(t)$ でピッチング運動を行なっているものとする。容器の傾斜角を $\theta(t)$ とし、

$$\theta(t) = \theta \cos \omega t \quad ; \quad t \geq 0 \quad (15)$$

なる式で表わされるものとすれば、

$$\Omega(t) = -\theta \omega \sin \omega t \quad ; \quad t \geq 0 \quad (16)$$

である。またこのとき、容器壁面上での境界条件は次のように表わされる。

$$u_n = \gamma \Omega(t) \quad S_1, S_2 \quad (17)$$

ここで、 γ は原点から壁面上の点までの長さである。時刻 $t=0$ のとき次のような初期条件を用いる。

$$u_i(x_1, x_2, 0) = 0 \quad (18)$$

$$\eta(x_1, 0) = x_1 \tan \theta + h \quad (19)$$

本解析では $2b=1.0$, $\theta=0.2$, $\Delta t=0.005$, $g=1.0$ とし、他のパラメータは次のような数値を用いた。

非粘性の場合 : $T=6.0$, $\nu=0.0$

粘性を考慮した場合 : $T=4.0$, $\nu=0.01$

図4, 図5は容器両側壁における自由表面変位の時間変化を非粘性場合と粘性場合にプロットしたものである。これらの結果は、通常観測される結果と良く一致している。

5. おわりに

自由表面をもつ流体の解析には、有限要素法を適用することにより数値的に解くことが可能であることを示した。この論文では、スロッシング現象の問題を用いて、本解析手法が正しい解を与えるものであることを例証した。さらに、スロッシング以外の自由表面を有する流体の運動を解析する問題に対しても有効に利用できるものと思われる。

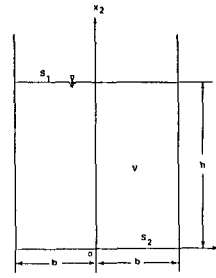


図1 二次元矩形容器

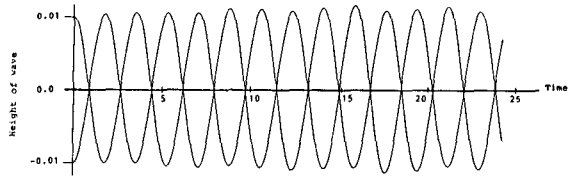


図2 自由振動 (非粘性場合)

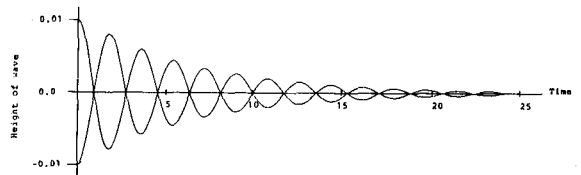


図3 自由振動 (粘性場合)

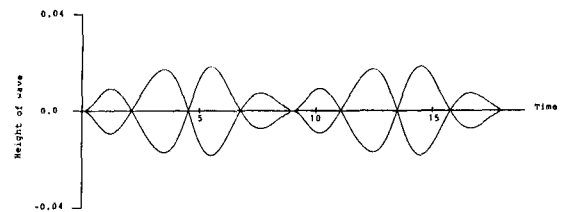


図4 ピッチングスロッシング
(非粘性場合)

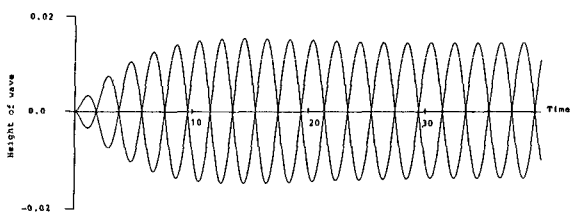


図5 ピッチングスロッシング
(粘性場合)