

I-536 円筒容器内の回転波

○筑波大学理工学研究科 学生員 白鳥昭浩
筑波大学 副学長 正員 椎貝博美

1. 球または円筒容器内に自由表面を持つ流体を入れて容器全体を振動させると、表面波が発生する。円筒容器内の表面波については石川・椎貝が振動法によって2次近似解まで求めている。球状容器では境界条件が複雑なこともあって厳密解は求められていないがBUDIANSKYはGREEN関数を用いて数値計算により適当な水深において3次の固有振動数まで求めている。さらに興味ある問題は、どちらの容器においても1次の固有振動数よりわずかに大きい振動数において波が回転を始めることである。この現象については以前から報告されていたが詳しいことはほとんどわかっていなかった。著者らは詳しい実験を行ない前回の講演会で報告している。今回は回転波についての理論的考察を行なったのでその結果を報告する。

2. 回転波は直角な2方向の表面波の重合わせでほぼ表現できることは前回に報告したとおりである。

そこで表面波を重合わせてどの程度回転波を表現できるかを検討してみる。石川・椎貝は円筒容器内の2層流体について内部波の厳密解を求めている。そこでこの1次近似解の上層流体の密度を0とするとX方向の表面波の速度ポテンシャル Φ 、 η は次式で与えられる。

$$\Phi = B_1 J_1(kr) \cos \theta \cosh(k(h+z)) \cos \omega t \quad (1)$$

$$\eta = a_1 J_1(kr) \cos \theta \sin \omega t \quad (2)$$

$$B_1 = a_1 / k \sinh(kh) \quad (3)$$

ここで h は水深、 ω は加振器の振動数、 k は波数、 $J_1(kr)$ は1次のBESSEL関数である。

(1) (2) の方程式に y 方向の波を x 方向の波に対して α の位相差を与えて重合わせると Φ 、 η は次式で与えられる。

$$\Phi = B_1 J_1(kr) \cos \theta \cosh(k(h+z)) \cos \omega t + B_2 J_1(kr) \sin \theta \cosh(k(h+z)) \cos(\omega t + \alpha) \quad (4)$$

$$\eta = a_1 J_1(kr) \cos \theta \sin \omega t + a_2 J_1(kr) \sin \theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (5)$$

速度ポテンシャル、波高が(4) (5)式で表わされるということは流体には x 、 y の2方向から外力が働いているということを表わしている。しかし現実には回転波は1方向に振動させた場合に発生するものであり、容器にたいする1方向の加振で流体には2方向の外力が働くことの理由はわからない。ここでは2方向の波を重合わせることによって回転波を表わせることを示したいと思う。

(4) (5) の方程式で問題となるのは2方向の波のそれぞれの波高の大きさを表わす a_1 、 a_2 と位相差 α の評価である。 $a_2=0$ ならば x 方向のみの外力による波動を表わすことになる。従って $a_1 \gg a_2$ 、 $a_1 \ll a_2$ の場合は $a_2=0$ 、 $a_1=0$ と考えてさしつかえないと思われるのでここでは問題にしない。そこで $a_1=a_2=a$ とした時に α の値をかえて(5)式を調

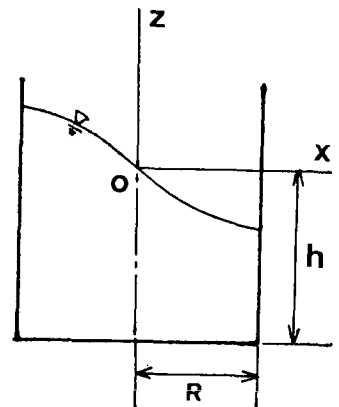


図-1 円筒容器内の波

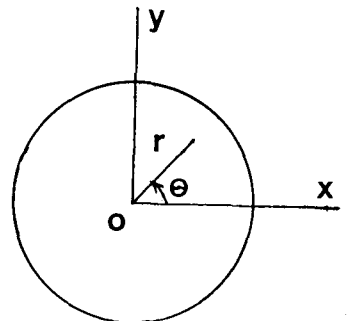


図-2 円筒座標

べる。 $\alpha=0, \pi$ とすると(5)式は次のようになる。

$$\eta = 2aJ_1(kr) \sin(\theta \pm \frac{\pi}{4}) \sin \omega t \quad (6)$$

(6)の方程式は1方向の波動と同じ形をしている。ただ振動方向がx軸から $\pi/4$ だけ回転しただけである。つまりこの場合2方向の波を発生させる外力の合力は常にx軸に対して $\pi/4$ 回転した方向でありその方向は変化しないので1方向の外力による波動と何等変わらないことになる。これは a_1, a_2 の値が異なっても同様である。ただこの場合 a_1, a_2 の値が変化すれば、波の振動方向が変化するのである。

$\alpha = \pm \pi/2$ の場合、(4)(5)式は次ぎのようになる。

$$\Phi = B_1 J_1(kr) \cos(k(h+z)) \cos(\omega t + \theta) \quad (7)$$

$$\eta = aJ_1(kr) \sin(\omega t + \theta) \quad (8)$$

ここで θ は座標角である。(8)式は同一波高で回転する波を表わしており、また ω 方向に進む進行波であるとも考えることもできる。また(3)式より明かに見掛け上は回転する波であるが渦なしである。 r, θ, z 方向の流速を U_r, U_θ, U_z とすると(7)式より

$$U_r = B_1 (J_0(kr)k - J_1(kr)/r) \cosh(k(h+z)) \cos(\omega t + \theta) \quad (9)$$

$$U_\theta = -B_1 J_1(kr)/r * \cosh(k(h+z)) \sin(\omega t + \theta) \quad (10)$$

$$U_z = B_1 J_1(kr)k \sinh(k(h+z)) \cos(\omega t + \theta) \quad (11)$$

$$U_\theta = -B_1 J_1(kr)/r * \cosh(k(h+z)) \sin(\omega t + \theta) + C\omega r \quad (12)$$

(9)(10)式に於いて $z=0$ として水面上の水粒子軌跡を求めたものを図-3に示した。これと実験値を比較した場合に、粒子の円軌道については実験値とよくあうが容器の縁に沿った運動は表現できていない。この場合、理論値に比較して実験値では回転波の進行方向に大きな流速を持っているものと思われる。そこでポテンシャルから求めた θ 方向の流速に c を定数として、 r に比例する適当な流速を加えた半実験式(12)から求めた軌跡を図-5に示す。これを見ると実験結果とよく似た軌跡であることがわかる。

3. 参考文献

石川・椎貝：円筒水槽内二層流体における内部波について，土木学会論文報告集，No. 219, 1973.

白鳥・椎貝：球状容器内に発生する波の性質，土木学会学術講演集，1985.

BUDIANSKY: SLOSHING OF LIQUIDS IN CIRCULAR CANALS AND SPHERICAL TANKS, JOURNAL OF THE AERO SPACE SCIENCES, 1960.

$f=2.55\text{hz}$ $R=3.61\text{cm}$ $C_0=1.5\text{cm}$

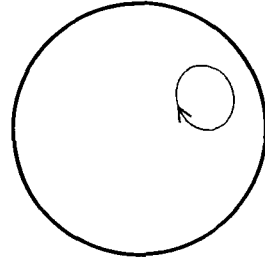


図-3 水面上の水粒子軌跡(理論値)

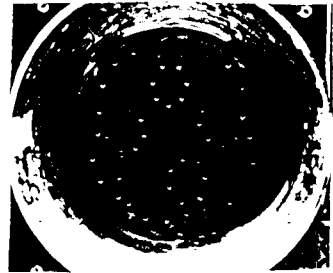


図-4 水面上の水粒子軌跡(実験値)

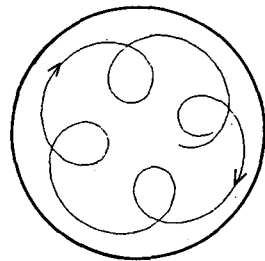


図-5 水面上の水粒子軌跡
(修正した理論値)