土木学会第41回年次学術講演会（昭和61年11月）

I-430　地動を与えたラーメン構造物の応答

信州大学　正員○夏目正太郎
石川清志

§1. まえがき　加速度地震記録から、線形加速度法により地動が得られるので、時々刻々と変化する変位を、直接構造物の支点変位として与えたときの応答を得ようとするものである。加速度により力を入力としようとすれば、支点上における質量の評価に曖昧さが残るのに対し、支点変位として地動そのものが与えられるので、大きさの評価が明瞭である。

固有マトリクス法にて強制振動を扱うには、微分方程式の斉次解と特解の和にて得られ、この場合特解における外力に対しては、荷重マトリクスで処理するので、斉次解も特解も微分方程式の右辺をゼロとした型の解でよく、斉次解は固有値を得るために操作し、特解は境界条件として支点変位が地動に等しくなるという境界値問題として処理される。前者は固有値が決定してもまだ、積分常数群である所の固有マトリクスが未定のままであるが固有値を得た行列式を係数行列とする固有マトリクスのうち、1つの未定常数をもって他の未定常数との比が決まるので、各固有値ごとに1つずつ未定常数を残して、斉次解の中に出てくる固有マトリクスをそれらの未定常数にておらわすことが出来る。この最後に残った未定常数は、振動の初期条件を与えることにより、決定される。

§2. 基本微分方程式　構造物の挙動は、各部材、各部分の挙動の集積したものであり、基本になるのは1本の部材の伸縮と曲げを各節点でつなげたものである。故に平面2次元系の骨組構造では、たて振動とたわみ振動の単なる抱き合わせで1部材の挙動とし、それら相互間は独立で互いに干渉しないとする。

たて振動：$EA\left(1+\varepsilon_u\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$　(1)　；　たわみ振動　$EI\left(1+\varepsilon_w\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$　(2)

これらから派生する状態量を、変位に関するものと、力学量に関するものとに分けておくと、後に出てくる平衡条件と、変位の適合条件を取り入れるのに便利である。

$$\text{変位}\ U=\begin{bmatrix}u\\w\\\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\\frac{\nu}{L}\end{bmatrix}^{D}\begin{bmatrix}\cos\lambda p & \sin\lambda p & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\nu p & \sin\nu p & ch\,\nu p & sh\,\nu p\\ 0 & 0 & -\sin\nu p & \cos\nu p & sh\,\nu p & ch\,\nu p\end{bmatrix}N e^{i\alpha t} \qquad (3)$$

$$\text{力学量}\ V=\begin{bmatrix}F\\S\\M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{EA\lambda}{L}(1+i\alpha\varepsilon_u)\\-\frac{EI\nu^3}{L^3}(1+i\alpha\varepsilon_w)\\-\frac{EI\nu^2}{L^2}(1+i\alpha\varepsilon_w)\end{bmatrix}^{D}\begin{bmatrix}-\sin\lambda p & \cos\lambda p & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sin\nu p & -\cos\nu p & sh\,\nu p & ch\,\nu p\\ 0 & 0 & -\cos\nu p & -\sin\nu p & ch\,\nu p & sh\,\nu p\end{bmatrix}N e^{i\alpha t} \qquad (4)$$

$p=\frac{x}{L}$，$w=w_h+w_p$，$u=u_h+u_p$，$\lambda^2=\frac{\gamma A\alpha^2L^2}{g(1+i\varepsilon_u\alpha)EA}$，$\nu^4=\frac{\gamma A\alpha^2L^4}{g(1+i\varepsilon_w\alpha)EI}$，斉次解 $\alpha=\omega$，特解 $\alpha=\frac{n\pi}{T}$ (5)

ε_u，ε_w は内部粘性減衰係数

固有マトリクス法では外力を荷重マトリクスにて扱うので特解も斉次解も同じ型になる。地動があたかも外力の役割りを果すわけで、このときは、特解における境界条件にて、支点変位が地動と等しいとすれば、それが、外力の作用となる。特に荷重マトリクスを必要としない。

§3. 移行演算と境界条件　多層ラーメンのように幾つかの節点がある構造物を解くには、各節点における平衡方程式と適合条件式を連立的に解けばよいのであり、支点の位置ではそれが支持条件または境界条件となる。この様な節点における方程式を全部書き連らねると、非常に次元数の大きな連立方程式になってしまうが、固有マトリクスの移行演算を実行すれば、あたかも連立方程式の消去法による解法の如く、漸化式の型

で追って行ける。斉次解からは固有値問題としての固有値を求める手続きとなり、特解からは境界値問題として固有マトリクスが得られる。支点変位は、地震記録から引き直したジグザクの変位を Fourier 級数に展開することにより、特解の支点変位とよくそりを合わせることが出来る。この時の移行演算の方向は、最上階の水平部材の固有マトリクス $\mathbb{N}$ を順次下方部材の固有マトリクスに移行して、得られた最後の移行子を境界条件へ代入すればよい。

(i) (0,1), (0,2) 節点における平衡方程式と適合条件により

$$\begin{bmatrix} \mathbb{N}_{11} \\ \mathbb{N}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{L} \\ \mathbb{R} \end{bmatrix}_1 \mathbb{N} \qquad (5)$$

を得る。

(ii) (11) と (12) 節点では適合条件方程式のうち、$\mathbb{N}_{11}$ と $\mathbb{N}_1$、$\mathbb{N}_{12}$ と $\mathbb{N}_1$ に関するものが移行演算に加わらないので、移行演算における水平部材の $\mathbb{N}_1$ の消去に利用する。

この適合条件より剛形子 I, J の仲介で

$$\begin{bmatrix} U(0) \\ U(1) \end{bmatrix} \mathbb{N}_1 = \begin{bmatrix} I\,U(0) \\ 0 \end{bmatrix} \mathbb{N}_{11} + \begin{bmatrix} 0 \\ J\,U(1) \end{bmatrix} \mathbb{N}_{12} \qquad (6)$$

を得る。(5) と (6) より

$$\mathbb{N}_1 = \mathbb{K}\,\mathbb{N} \qquad (7)$$

となる。

(iii) 一方移行演算では、

$$\begin{bmatrix} U(0) \\ V(0) \end{bmatrix} \mathbb{N}_{21} + \begin{bmatrix} -U(1) \\ V(1) \end{bmatrix} \mathbb{N}_{11} + \begin{bmatrix} 0 \\ J\,V(0) \end{bmatrix} \mathbb{N}_1 = 0 \qquad (8)$$

$$\begin{bmatrix} U(0) \\ V(0) \end{bmatrix} \mathbb{N}_{22} + \begin{bmatrix} -U(1) \\ V(1) \end{bmatrix} \mathbb{N}_{12} + \begin{bmatrix} 0 \\ J\,V(1) \end{bmatrix} \mathbb{N}_1 = 0 \qquad (9)$$

となる。故に (8), (9) と (5), (7) より

$$\begin{bmatrix} \mathbb{N}_{21} \\ \mathbb{N}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{L} \\ \mathbb{R} \end{bmatrix}_2 \mathbb{N} \qquad (10)$$

を得る。従って更に (ii) と (iii) を繰り返すと、一般に

$$\begin{bmatrix} \mathbb{N}_{r1} \\ \mathbb{N}_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{L} \\ \mathbb{R} \end{bmatrix}_r \mathbb{N} \qquad (11)$$

の形で漸化式となる。

(iv) 最後は支点上の境界条件へ入れて、

斉次解からは

$$\det \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{51} \cdot \mathbb{L}_5 \\ \mathbb{B}_{52} \cdot \mathbb{R}_5 \end{bmatrix} = 0 \qquad (12)$$

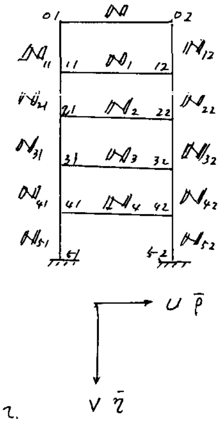
で固有値が得られ、

特解からは地動 $F(t)$ が

$$F(t) = \sum_m C_m\, e^{i\frac{2m\pi}{T}t} \qquad (13)$$

$$\mathbb{N}_m = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{51} \cdot \mathbb{L}_5 \\ \mathbb{B}_{52} \cdot \mathbb{R}_5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}_m \qquad (14)$$

できまる。



§4. 初期値問題

(12) の係数をもつ境界条件は、固有マトリクス $\mathbb{N}$ のうちの1つの未定係数を撰び、これを Ω と書きかえると、き、すでに固有値が決定されたので、(12) の条件式のうちの一本を除いた残りの条件式をとり、Ω がかかっている項を右辺へ移すことにより、Ω を設定した以外の未定係数を Ω で表わす、いいかえれば、Ω との比を決めることが出来る。

$$\mathbb{N}_n = \mathbb{P}_n(\omega)\,\Omega_n \qquad (15)$$

これが、固有値の個数の Ω_n が得られ、未定性を初期条件にて決定しようとする。すなわち、静止の状態をもって初期条件とすれば、構造物の水平方向と鉛直方向の挙動を変位速度をゼロとすればよい。前にも述べたように構造物の挙動は部材の挙動の集積であるということから、水平方向 U と鉛直方向 V の挙動は全体座標であらわす $\bar{p}$ と $\bar{q}$ に沿って集積されればよい。各部材の挙動は最上端水平部材の固有マトリクス $\mathbb{N}_m$ もしくは Ω で支配されるので、$U(\bar{p})$ も $V(\bar{q})$ も Ω_n と $\mathbb{N}_m$ で表わされ、この中で $\mathbb{N}_m$ は既知数である。今、$U(\bar{p})$, $V(\bar{q})$ をそれぞれ Fourier 級数で展開すれば

$$U(\bar{p}) = \sum_m a_m \cdot \sin m\pi\bar{p}, \qquad V(\bar{q}) = \sum_m b_m \sin m\pi\bar{q} \qquad (16)$$

ここに展開項の同類項恒等式を m, n の数にそって整理すると、

$$\mathbb{A}_{mn}\Omega_n = \mathbb{B}_m \qquad (17)$$

を得、まさしく Ω_n を決定する連立方程式となる。よってすべての未定常数は決定され状態量がおきまることになる。

$$\mathbb{W} = \sum_n \mathbb{D}\,\mathbb{R}(\omega_n p) \cdot \mathbb{F}\,\mathbb{P}\,\Omega_n\, e^{i\omega_n t} + \sum_m \mathbb{D}\,\mathbb{R}\left(\tfrac{2m\pi}{T}p\right) \cdot \mathbb{G}\,\mathbb{N}_m\, e^{i\frac{2m\pi}{T}t} \qquad (17)$$

※使用した強震記録は、参考文献にあった新潟地震と、エルセントロの記録を引用した。

参考文献：地震動のスペクトル解析入門（大崎順彦著）；マトリクス構造解析（谷本勉之助著）