I-422　ＣＱＣ法の理論展開とＲＭＳ法の問題点

住友重機械工業 (株)　正員　北原俊男
住友重機械工業 (株)　正員　○谷本　健

1　まえがき

応答スペクトル解析ではＲＭＳ法に代わってＣＱＣ法が耐震設計で使用されつつある。現在、ＣＱＣ法の理論展開は、①統計解析、②複素積分が使用されている。本理論展開では①ベクトル解析、②実関数積分によってＣＱＣ法を証明し、ＲＭＳ法の問題点を明確にする。

2　ＣＱＣ法の理論展開

振動解析ではｔ領域、ω領域とｓ領域表現があり、ｓ領域ではラプラス変換の拡張であるミクシンスキー演算子を使用し、スペクトル密度関数やパワー等をグラム行列（ｄｙａｄ）を用いて表現してＣＱＣ法がベクトル解析的に矛盾のない方法である事を示す。

(1)式の構造物の振動方程式は質量正規化モーダル行列；Φにより (2)式のモード空間に変換される。

$$M\ddot{U}(t)+C\dot{U}(t)+KU(t)=M_{\alpha}\,\alpha(t)\ \ldots(1)、\qquad E\ddot{Y}(t)+2D\Omega\dot{Y}(t)+\Omega^2Y(t)=P\alpha(t)\ \ldots(2)$$

但し、Ｅ；単位行列、Ｄ；減衰定数行列、Ω；固有角周波数行列、Ω^2；固有値行列、$\alpha(t)$；構造物の加速度、M_{α}；$\alpha(t)$ の質量ベクトル、Ｐ；モード寄与率ベクトルとし、行列は全て対角化している。

次に、ｔ領域からｓ領域に写像する。構造物空間の写像を$U(t)$ から$V(s)$ 、モード空間を$Y(t)$ からＺ(s) とすると速度、加速度はｓによる演算子関数ベクトルで表される。

$\dot{V}(s)=s\,V(s)$；構造物の　速度、　$\dot{Z}(s)=s\,Z(s)$；モードの　速度

$\ddot{V}(s)=s^2V(s)$；構造物の加速度、　$\ddot{Z}(s)=s^2Z(s)$；モードの加速度

この写像の係数行列は変化せず、$\beta(s)$ を$\alpha(t)$ のスカラー演算子関数として、$Z(s)$ が解ける。

$$Z(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s^2+2h_1\omega_1 s+\omega_1^2} & \cdots & 0\\ 0 & & \frac{1}{s^2+2h_M\omega_M s+\omega_M^2}\end{bmatrix}P\beta(s)=P^{\Theta}\,H(s)\cdot\beta(s)、（添字^{\Theta}は対角化行列）\ldots(4)$$

$Z(s)$ が求まると、構造物の変位、速度と加速度はΦにより下式で解ける。これらはモードの演算子関数ベクトル；$H(s)$ の線形結合でスカラー微分演算子；ｓの次数以外は皆同じである。

$$V(s)=\Phi P^{\Theta}\,H(s)\cdot\beta(s)\ ..(5)、\ \dot{V}(s)=s\,\Phi P^{\Theta}\,H(s)\cdot\beta(s)\ ..(6)、\ \ddot{V}(s)=s^2\,\Phi P^{\Theta}\,H(s)\cdot\beta(s)\ ..(7)$$

更に、ｓからωの写像は$s=j\omega\,(j=\sqrt{-1})$ を代入し、構造物の変位、速度と加速度の複素周波数応答関数ベクトルが得られ、これはフーリェ変換である。

$$V(j\omega)=\Phi P^{\Theta}\,H(j\omega)\cdot\beta(j\omega)\ \ldots(8)、\qquad \dot{V}(j\omega)=(j\omega)\,\Phi P^{\Theta}\,H(j\omega)\cdot\beta(j\omega)\ \ldots(9)$$

$$\ddot{V}(j\omega)=(j\omega)^2\,\Phi P^{\Theta}\,H(j\omega)\cdot\beta(j\omega)\ ..(10)$$

速度と加速度は jωの積の違いなので変位に着目する。(8)式より構造物の k自由度目の変位応答；$Vk(j\omega)$ と共役複素関数；$Vk(-j\omega)$ はΦの k行目；Ψk^T と$H(j\omega)$, $H(-j\omega)$ の２次形式で表される。

$$Vk(j\omega)=\Psi k^T P^{\Theta}\,H(j\omega)\cdot\beta(j\omega)\ ..(11)、\qquad Vk(-j\omega)=\Psi k^T P^{\Theta}\,H(-j\omega)\cdot\beta(-j\omega)\ ..(11)'$$

構造物の k自由度目の変位のスペクトル密度関数；Sdは(11)式と(11)’式の積だから実関数である。下式で対称化すると実関数のＧＲＡＭ行列；Ｇ（ω）の実２次形式となる。一般的な証明方法では、非対称行列のため、複素２次形式となり留数定理と複素積分が不可欠となる。

$$\begin{aligned}Sd&=\frac{1}{2}\,[Vk(j\omega)Vk(-j\omega)+Vk(-j\omega)\,Vk(j\omega)]\\&=\Psi k^T P^{\Theta}\,[\,\frac{1}{2}\{H(j\omega)\,H^T(-j\omega)+H(-j\omega)\,H^T(j\omega)\}\,]\,P^{\Theta}\,\Psi k\cdot\beta(j\omega)\cdot\beta(-j\omega)\\&=\Psi k^T P^{\Theta}\,G(\omega)\,P^{\Theta}\,\Psi k\cdot\beta(j\omega)\cdot\beta(-j\omega)\end{aligned}$$

$$G(\omega)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(-\omega^2+2jh_\ell\omega_\ell\omega+\omega_\ell^2)(-\omega^2-2jh_m\omega_m\omega+\omega_m^2)}+\frac{1}{(-\omega^2-2jh_\ell\omega_\ell\omega+\omega_\ell^2)(-\omega^2+2jh_m\omega_m\omega+\omega_m^2)}\right]\ ..(15)$$

Sdをωにより区間；［0，∞）で積分すると構造物の k自由度目の変位のパワー;Ps となるが、入力関数；$\beta(j\omega)\cdot\beta(-j\omega)$ の扱いが問題になる。現在の所、①ホワイトノイズ；G0＝定数＝$\beta(j\omega)\cdot\beta(-j\omega)$ と、②金井スペクトル；２次フィルターの周波数応答関数（４次のスペクトル）が使われており、任意の入力関数を解析的に積分する事は出来ない。ここでは、平坦な周波数特性のホワイトノイズで積分する。

$$Ps=\int_0^\infty Sd\,d\omega=\Psi k^T P^\Phi\left[\int_0^\infty G0\cdot G(\omega)d\omega\right]P^\Phi\,\Psi k=\Psi k^T P^\Phi\lambda_0 P^\Phi\,\Psi k$$

$$\lambda_0=[\lambda_{0\ell m}]=\left[\frac{2\pi G0\,(h\ell\,\omega\ell+hm\,\omega m)}{(\omega\ell^2-\omega m^2)^2+4\,\omega\ell\,\omega m(h\ell\,\omega\ell+hm\,\omega m)(h\ell\,\omega m+hm\,\omega\ell)}\right]\quad ..(17)$$

(17)式の解析的積分結果は、ＣＱＣ法の基礎となった０次スペクトルモーメント；λ_0である。モード相関係数行列；ρは λ_0 を$\sqrt{\lambda_{0\ell\ell}\lambda_{0mm}}$で正規化して得られる。変位のパワーを$\rho$で表すと下式になる。

$$Ps=\Psi k^T P^\Phi\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_{011}} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_{0MM}}\end{bmatrix}\rho\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_{011}} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_{0MM}}\end{bmatrix}P^\Phi\,\Psi k\quad ..(18)$$

$$\rho=\left[\frac{8\sqrt{h\ell\,hm}(h\ell+\gamma\,hm)\gamma^{3/2}}{(1-\gamma\ \ )\ \ +4\gamma\,(h\ell+\gamma\,hm)(\gamma\,h\ell+hm)}\right]、\quad(\gamma=\omega m/\omega\ell)\quad ..(19)$$

ＣＱＣ法ではρを用いて応答スペクトル解析が行え、$\sqrt{\lambda_{0\ell\ell}}$に加速度応答スペクトル；$Sa\ell$ を代入し、平方根を取ると構造物の k自由度目の変位応答；Ukとなる。

$$Uk=\sqrt{\Psi k^T P^\Phi\begin{bmatrix}Sa_1 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & Sa_M\end{bmatrix}\rho\begin{bmatrix}Sa_1 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & Sa_M\end{bmatrix}P^\Phi\,\Psi k}=\sqrt{\Psi k^T P^\Phi\,Sa^\Phi\rho\,Sa^\Phi P^\Phi\,\Psi k}$$

$$=\sqrt{Xk^T\rho\,Xk}\ 、\quad(Xk=Sa^\Phi P^\Phi\,\Psi k)$$

3　解析的展開の整理

ＣＱＣ法をベクトル解析的に証明したが、その過程をまとめ直してみると次の点になる。

① 時刻歴応答解析などで構造物の１次応答値はモードの応答値の線形結合で表されている。

② ＲＭＳ法やＣＱＣ法は２次応答値を基本としている。

③ 線形結合で表された１次応答値の２乗値のスペクトル密度関数はＧＲＡＭ行列を用いて表される。

④ パワーもＧＲＡＭ行列を解析的に積分して得られる。

⑤ つまり、スペクトル密度関数もパワーもＧＲＡＭ行列の２次形式で表される。

⑥ ＲＭＳ法は、非対角項の積分を無視したため、パワーの評価に問題がある。つまり１自由度系と多自由度系ではパワーの計算が異なり、多自由度系で線形結合のある時は必然的に２次形式になる。

⑦ ＣＱＣ法では固有角周波数と減衰定数の関数行列であるモード相関係数；ρで非対角項を評価している。ρの対角項は常に１，非対角項は０～１であり、近似重根の時≒１となる。

⑧ 本理論展開は、実関数積分のため、本来任意の積分区間が採用でき、解析的発展が期待できる。

4　『問題のある重根』と長大橋への耐震設計の適用

一般的に、ＲＭＳ法は近似重根の時に問題が発生すると言われているが、近似重根であればいつでもＲＭＳ法の応答値が問題とは限らず、①～⑤の条件を同時に満足すると『問題のある重根』となる。

①Ｎ重根が存在する。　②減衰定数が大きい。　③固有ベクトル（Ψk^T)が大きい。

④モード寄与率（P^Φ）が大きい。　⑤加速度応答スペクトル（Sa^Φ)が大きい。

斜張橋立体モデルによる応答スペクトル解析の具体的計算結果は当日発表するが、耐震設計におけるＣＱＣ法適用の必然性は以下の様に整理できる。

① 『問題のある重根』の構造系の発生は予見できない。

② 一般的に、どの自由度や部材に『問題のある重根』の影響が出るかを言うのは困難である。

③ ＲＭＳ法は『問題のある重根』を識別出来ない。

④ ＣＱＣ法は『問題のある重根』を意識する必要がなく、安心して計算できる。

5　ＣＱＣ法の問題点

ＣＱＣ法をベクトル解析的に導いたが次の問題点がある。これらを解決する糸口は、対称グラム行列の積分であると考えられ、有限区間積分の関数は現在検討中である。

① パワーを求める時の仮定入力はホワイトノイズである。

② 留数定理による複素積分から積分区間が［０，∞）で、有限フーリェ積分ではない。

③ ①と②のため加速度が発散する。

1)E.L.Wilson et.al "A REPLACEMENT FOR THE SRSS METHOD IN SEISMIC ANALYSIS" NAPRA資料　1981年11月
2)A.D.Kiureghian "Structural Response to Stationary Excitation" Proc. ASCE EM6 1980
3)吉田耕作 "演算子法　一つの超関数論" 東大出版会　1982年