I-373　横衝撃を受ける梁の簡略解法について

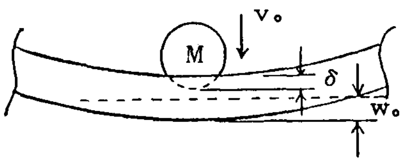
岩手大学工学部　正員　岩崎　正二
日本大学生産工学部　正員　能町　純雄

1．まえがき

梁が横衝撃を受けた際に生ずる衝撃力あるいはモーメントの挙動は、静的な荷重を受けた場合と比較してその様相が異なり工学上非常に重要な問題である。そこで、剛球あるいは平底円柱剛体により横衝撃を受ける梁の衝撃力を、有効長の考え方を取り入れた簡略解法によって求め、積分方程式解法による結果と比較検討を行った。従来、簡略解法の研究としては、被衝突物における衝撃点での局部変形まで考慮したものは少ない。Greszczuk[1]は剛球と円形板の衝突問題を、岩崎[2]は剛球と弾性床上無限板の衝突問題を、局部変形を考慮したエネルギーのつり合から論じている。本報告ではこれらの手法をはりの衝撃問題に適用し、その有用性について論じたものである。

2．解析理論

(1)積分方程式法



図－1

無限長梁上に剛体が自然落下した時に接触点において生ずる衝撃力P(t)を求める問題を考える(図－1)。このとき解くべき基本式は次のようになる。

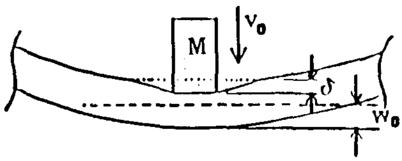
$$E_1 I\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho A_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=P(t)\Delta(x)$$ 《梁の振動方程式》①

$$M\left(\frac{\partial^2 w_o}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}\right)=-P(t)+W_o$$ 《落体の運動方程式》②

$$\delta=kP^{\frac{2}{3}}(t)$$ 《接触条件式》③

ここで、$W_o=Mg$，$\Delta(x)$：デルタ関数

$$k=\left\{\frac{9\pi^2}{16}\cdot\frac{(k_1+k_2)^2}{R}\right\}^{\frac{1}{3}},\quad k_1=\frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1},\quad k_2=\frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2},$$



図－2

ν_1，ν_2，E_1，E_2 はそれぞれ梁と剛球のポアソン比とヤング率を表す。I，ρ，A_1，w：梁の断面2次モーメント，単位体積質量，断面積，任意点のたわみ、M，R：剛球の質量，半径、g：重力加速度、w_o，δ は接触点のたわみと剛球の梁へのくいこみ深さを表す。式①，②，③を連立して解くと、無限長梁に剛球が衝突した際に生じる衝撃力を定める次のような非線型積分方程式が求まる。

$$kP^{\frac{2}{3}}(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho A_1 a}}\int_0^t P(\tau)\sqrt{t-\tau}\,d\tau+\frac{1}{M}\int_0^t P(\tau)(t-\tau)\,d\tau=v_o t+\frac{1}{2}gt^2 \quad ④$$

ここで、$v_o=\sqrt{2gH}$，H：剛球の落下高さ，$a^4=E_1 I/\rho A_1$．

次に剛球のかわりに平底円柱剛体が自然落下する場合(図－2)は、接触点での衝撃力と局部的変形の関係式を2次元弾性論より次のように仮定する。

$$P(t)=K\delta(t) \quad ⑤$$

ここで、$K=2E_1 r/(1-\nu_1^2)$，r：平底円柱剛体の半径，従って式①，②，⑤を連立して解くと無限長梁に平底円柱剛体が衝突した際に生じる衝撃力は、次のような第2種ボルテラ型積分方程式となる。

$$P(t)+\frac{K}{\sqrt{2\pi\rho A_1 a}}\int_0^t P(\tau)\sqrt{t-\tau}\,d\tau+\frac{K}{M}\int_0^t P(\tau)(t-\tau)\,d\tau=K\left(v_o t+\frac{1}{2}gt^2\right) \quad ⑥$$

ただし、Mは平底円柱剛体の質量である。

(2)簡略解法

簡略解法とは、衝撃力を受ける梁のたわみ曲線を中央に静的な力を加えたときのたわみ曲線と仮定することにより最大衝撃力、最大モーメントを求める方法である。また簡略解法の中でも、梁の質量を無視する初等解法、梁の質量を考慮するがその考慮の仕方にCox、Morley氏の考え方に従う方法がある。今回は、それに新たに有効長の考え方を取り入れた。有効長とは、力の伝達している部分のみが梁として機能しているものと考え、

その部分を有効長と呼ぶことにしたものである。今回は有効長を、半無限平面に落体が衝突した時の最大衝撃力を生ずる時間に波速を乗じることにより算出した。

剛球が梁に衝突する場合の簡略式を求めるに際しては、まず式②に$\dot{w}_o+\delta$を乗じて$0\sim t_{max}$まで積分する。ただしt_{max}は衝撃力が最大となる時間である。ドットは時間に関する微分を表す。すなわち、

$$\frac{1}{2}Mv_o^2-\frac{1}{2}Mv_1^2=\int_o^{t_{max}}P(t)(\dot{w}_o+\delta)\,dt-W_o\int_o^{t_{max}}(\dot{w}_o+\delta)\,dt \qquad ⑦$$

ただし、$v_1=\dot{w}_o(t=t_{max})$。

簡略解法では動的たわみを有効長ℓ^*の固定支持梁の静的たわみを用いて表す。すなわち

$$w(x,t)=w_o(t)(\ell^*-2x)^2(\ell^*+4x)/\ell^{*3} \quad (-\ell^*/2\leqq x\leqq 0) \qquad ⑧$$

式①に$\dot{w}_o$を乗じて$0\sim t_{max}$まで積分する。その後xに関しては式⑧を代入し$-\ell^*/2\sim\ell^*/2$まで積分すると

$$\int_o^{t_{max}}P(t)\dot{w}_o\,dt=96E_1Iw_o^2(t_{max})/\ell^{*3}+13/70\cdot\rho A_1\ell^*v_1^2 \qquad ⑨$$

式⑦に式③，⑨を代入すると $\frac{1}{2}Mv_o^2-\frac{1}{2}Mv_1^2(1+\frac{13}{35}\kappa)$

$$=Kp\ w_o^2(t_{max})/2+2k^{-\frac{3}{2}}\delta^{\frac{5}{2}}(t_{max})/5-W_o\{w_o(t_{max})+\delta(t_{max})\} \qquad ⑩$$

ここで、$\kappa=W/W_o$, $W=\rho A_1\ell^*g$, $Kp=192E_1I/\ell^{*3}$, $\ell^*=2.94c_o\delta_1/v_o$,

$c_o=\sqrt{E_1/\rho}$, $\delta_1=(2.5W_ok^{\frac{3}{2}}H)^{\frac{2}{5}}$.

次 に、$w_o(t)=P(t)/Kp$ ………⑪　のように仮定すると$v_1=0$となる。今、式⑩に式③，⑪を代入すると最終的に最大衝撃力Pmaxを求める次のような６次方程式が求まる。

$$C^3P_{max}^6+(F^3-3BC^2)P_{max}^5+3\{C(B^2-AC)-F^2J\}P_{max}^4+\{B(6AC-B^2)+3FJ^2\}P_{max}^3$$
$$+\{3A(AC-B^2)-J^3\}P_{max}^2-3A^2BP_{max}-A^3=0 \qquad ⑫$$

ここで、$A=W_oH$（初等解法）、$B=W_o/Kp$, $C=1/2Kp$, $F=2k/5$, $J=W_ok$.

平底円柱剛体が梁に衝突する問題では式⑦に式⑤，⑨，⑪を代入することで最大衝撃力は次のように求まる。

$$P_{max}=nW_o \qquad (n：衝撃係数) \qquad ⑬$$

ここで、$n=1+[\,1+\frac{2H}{w_{st}}\cdot\frac{1}{1+\beta}\,]^{\frac{1}{2}}$（初等解法）、 $\beta=\frac{\delta_{st}}{w_{st}}$, $\delta_{st}=\frac{W_o}{K}$, $w_{st}=\frac{W_o\ell^{*3}}{192E_1I}$,

$K=2E_1r/(1-\nu_1^2)$, $\ell^*=c_o\pi/\omega$, $\omega=\sqrt{K/M}$

３．数 値 計 算 例

数値計算は図－１に示すような無限長矩形コンクリート梁に鋼剛球が落下する問題を扱った。計算には次のような数値を用いた。

梁断面寸法（幅b×高さh）：b＝ 10.0(cm), 15.0(cm), 20.0(cm), h＝ 1.77～30.0 (cm)

ヤング率　：$E_1=2.7\times10^5$ (kg/cm²)

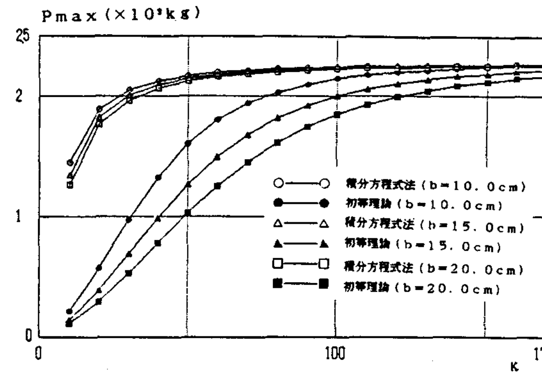
ポアソン比　：$\nu_1=0.167$

単位体積重量：$\rho g=2.29$ (g/cm³)

剛球の半径　：$R_r=2.0$ (cm)

落下高さ　：$H=1.0$ (m)

図－３は最大衝撃力Pmaxと、梁と剛球の重量比κの関係を積分方程式と簡略解法について表したものである。



図－３

【参 考 文 献】

１）Login B. Greszczuk：IMPACT DYNAMICS, Wiley-Interscience , p60

２）岩崎正二：衝撃荷重を受ける平板の動的応答解析、岩手大学工学部研究報告第37巻、昭和59年12月、p127-138

３）岩崎正二、能町純雄：弾性球による無限長梁の横衝撃について、第37回土木学会全国大会講演概要集、p405