I-372　サブストラクチャー法による半無限弾性体中の波動散乱問題の解析

福井高専　校長　正員　丹羽義次
京都大学工学部　正員　廣瀬壮一
京都大学大学院　学生員○宗藤洋

1．はじめに

本研究は、不整形境界面を有する等方・均質で線形の半無限弾性体における地震動特性を、境界積分方程式法により解析するものである。特に、定式化においてはサブストラクチャー消去法を用いることにより、有限な積分範囲を有する境界積分方程式を導き、従来の境界積分方程式との比較を行なった。

2．解析モデルと基礎式

解析モデルは、図－1に示すような半円からなる不整形境界面∂Sを有する等方・均質で線形な半無限弾性体を想定し、このモデルに面内平面波が入射した時の不整形境界面∂S上の変位を求める。なお、ここでは平面ひずみ状態を仮定し、2次元問題として解析を行う。以上のことより、半無限弾弾性体Dにおける基礎式は次式となる。

$$\mu u_{i,jj}(x)+(\lambda+\mu)u_{j,ji}(x)=\rho\omega^2 u_i(x)\qquad(i,j=1,2)\quad(1)$$

ここに

$u_i(x)$: 点xにおける i方向の変位ベクトル

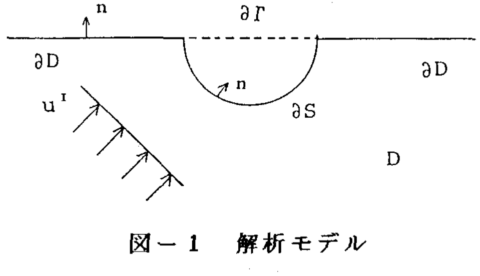
λ、μ: Lameの定数　，ω：角周波数

である。また、地表面上で応力ベクトルが0なる境界条件が与えられているとする。

3．サブストラクチャー消去法を用いた境界積分方程式の定式化

この解析モデルに対して境界積分方程式を構成するに当たり、以下の方程式を満足する無限領域におけるGreen 関数を与える。

$$\mu U^k_{i,jj}(x,y)+(\lambda+\mu)U^k_{j,ji}(x,y)+\rho\omega^2 U_i(x,y)=-\delta_{ik}\delta(x-y)\quad(2)$$



図－1　解析モデル

ここに

δ_{ik}：Kronecker のデルタ

$\delta(x-y)$:Dirac のデルタ関数

である。無限領域におけるGreen 関数$U^k_i(x,y)$はすでに2次元問題に対して以下のように求められている。

$$U^k_i(x,y)=i/4\mu\cdot[H^{(1)}_0(k_T r)\cdot\delta_{ik}+1/k_T\cdot\partial/\partial x_i\,\partial/\partial x_k\cdot\{H^{(1)}_0(k_T r)-H^{(1)}_0(k_L r)\}]$$

ここに

$H^{(1)}_0(z)$:第1種0次Hankel関数

k_T: SV波の波数，　k_L:P波の波数，　$r=|x-y|$

である。次に、半無限領域におけるGreen 関数$\overset{*}{U}{}^k_i(x,y)$を以下のように定義する。

$$\overset{*}{U}{}^k_i(x,y)=2U^k_i(x,y)+\alpha^k_i(x,y)\quad(3)$$

この$\overset{*}{U}{}^k_i(x,y)$は、図－1の境界（$\partial D+\partial\Gamma$）において応力freeの境界条件を満足し、$\alpha^k_i(x,y)$は$\overset{*}{U}{}^k_i(x,y)$から$2U^k_i(x,y)$を差引いた正則項である。

まず、この半無限領域におけるGreen 関数を用い散乱波による変位ベクトル$\overset{s}{u}_i(x)$について境界積分方程式を構成する。境界条件を考慮し、Gauss の発散定理を適用し、極限移項を行うと次式を得る。

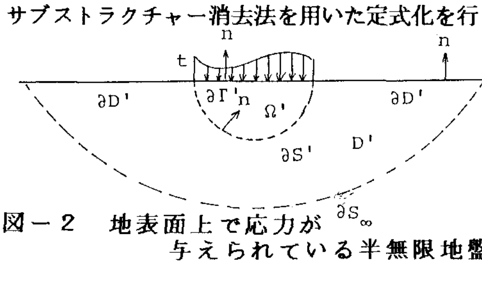
$$\int_{\partial S}\{\overset{*}{U}{}^k_i(x,y)\overset{s}{t}_k(y)-\overset{s}{u}_k(y)\overset{*}{T}{}^k_i(y)\}\,dS_y=\tfrac{1}{2}\overset{s}{u}_i(x)\qquad x\ \mathrm{on}\ \partial S\quad(4)$$

ここに

$t_i(x)$:点xにおける i方向の応力ベクトル

$\overset{*}{T}{}^k_i(x,y)$: $\overset{*}{U}{}^k_i(x,y)$の二重層核

である。この(4) 式は、積分範囲が有限となるが、Green 関数の計算が非常に複雑になるため実用性に欠けるものである。そこで、積分範囲は有限のままでなおかつGreen 関数の計算が比較的簡素化できるサブストラクチャー消去法を用いた定式化を行う。



図－2　地表面上で応力が与えられている半無限地盤

まず、図－２に示すような半無限地盤（$D' + \Omega'$）を考える。基礎方程式は(1) 式と同様であり境界条件は次式で与えられる。

$$t_i(x) = 0 \qquad x \text{ on } \partial D'$$

$$t_i(x) \text{ or } u_i(x) \qquad \text{given at } x \text{ on } \partial\Gamma'$$

無限領域のGreen 関数を用いて領域Ω'に対する境界積分方程式を構成すると次式を得る。

$$\int_{\partial S' + \partial\Gamma'} \{U_i^k(x,y) t_k(y) - u_k(y) T_i^k(x,y)\}\, dS_y = \tfrac{1}{2} u_i(x) \qquad x \text{ on } (\partial S' + \partial\Gamma') \quad (5)$$

次に、半無限領域におけるGreen 関数を用いて半無限領域（$D' + \Omega'$）について境界積分方程式を構成すると次式を得る。

$$\int_{\partial\Gamma'} U_i^{*k}(x,y) t_k(y) dS_y = u_i(x) \qquad x \text{ on } \partial\Gamma' \quad (6)$$

(5)·(6) 式に選点法を適用し、各積分項を離散化して整理すると次の２式を得る

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^{(1)} \\ t^{(2)} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$[\mathbf{U}^*] \{t^{(2)}\} = \{u^{(2)}\} \quad (8)$$

ここに、u，t は離散化された変位及び応力ベクトルを表わし、右肩の(1)、(2) はそれぞれ図－２に示される境界$\partial S'$、$\partial\Gamma'$に関する量を表わす。(7) 式を変位ベクトルuについて解くと以下の式を得る。

$$\begin{Bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T + \\ \tfrac{1}{2} E \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^{(1)} \\ t^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^{(1)} \\ t^{(2)} \end{Bmatrix}$$

あるいは、

$$\{u^{(1)}\} = [W_{11}]\{t^{(1)}\} + [W_{12}]\{t^{(1)}\}$$

$$\{u^{(2)}\} = [W_{21}]\{t^{(1)}\} + [W_{22}]\{t^{(2)}\} \quad (9)$$

(8)·(9) 式より$u^{(2)}, t^{(2)}$ を消去すると次式を得る。

$$\{u^{(1)}\} = [[W_{11}][W_{12}][[U^*][W_{22}]]^{-1}[W_{21}]]\{t^{(1)}\}$$

$$= [\mathbf{S}]\{t^{(1)}\} \quad (10)$$

この(10)式は、境界条件を考えると先に求めた(4)式と同等な関係にあると考えられるので、$u^{(1)}, t^{(1)}$を図－１に示される境界∂S上のu^S, t^S と見なすことができる。よって、(10)式を書き換えると次式を得る。

$$\{u^S\} = [\mathbf{S}]\{t^S\} \qquad u^S, t^S \text{ on } \partial S \quad (11)$$

(11)式に境界条件を考慮して整理すると次式を得る

$$\{u^S\} = \{u^F\} - [S]\{t^F\} \qquad u, u^F, t^F \text{ on } \partial S \quad (12)$$

ここに、u^F, t^F は、入射波及び反射波による変位及び応力ベクトルを表わす。本研究においては、(12)式が解くべき境界積分方程式となる。

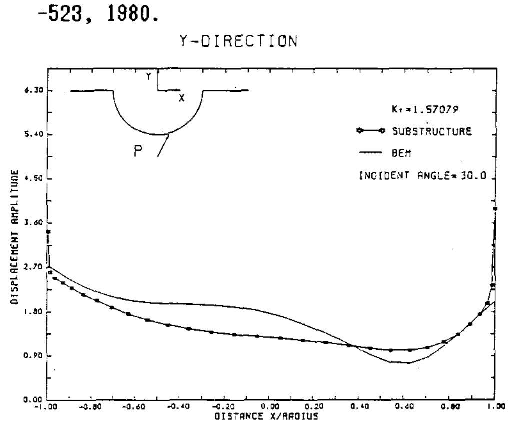
４．数値解析例

数値解析例として、図－３(a)·(b) を挙げておく図の縦軸は各Field Point における変位の振幅を入射波の振幅で、横軸は各Field Point のX座標を半円境界∂Sの半径で無次元化したものをそれぞれ表わしている。☆―☆は(12)式によって得られた解を、―は無限領域のGreen 関数だけで導かれた境界積分方程式の解をそれぞれ表わしている。図－３(a) は P波入射・波数$k_T = \tfrac{1}{2}\pi$・入射角30°でY方向変位を、図－３(b) はSV波入射・波数$k_T = \pi$・入射角30°でX方向変位をそれぞれ表わしている。

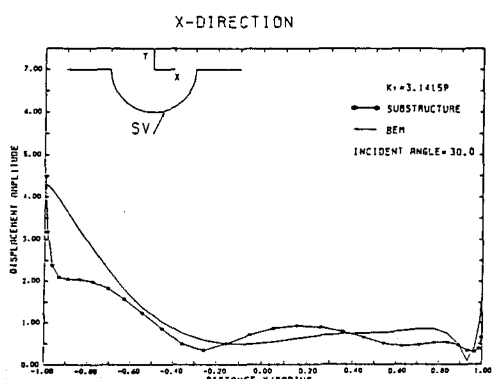
なお、詳細は発表当日に報告する。

参考文献

1) Gautam Dasgupta;Foundation impedance matrices by substructure deletion, Journal of the Eng.Mechanics Division,ASCE,106,EM3,pp.517-523, 1980.



図－３(a) 数値解析例



図－３(b) 数値解析例