土木学会第41回年次学術講演会（昭和61年11月）

I-371　ＢＥＭ－ＦＥＭ結合法による半無限領域における面外波動場の解析

熊本工業大学　正員　上杉　真平
熊本大学工学部　正員　大津　政康

1、はじめに

地盤表面の波動の伝播問題は、半無限領域における問題として解析される。境界要素法（ＢＥＭ）は、このような半無限領域の問題に対して有効である反面、不均質な領域には適用しにくいという欠点がある。そこで本研究では、実際の複雑な地盤において、不均質な特性をもつ領域を有限要素法（ＦＥＭ）で、それを囲む均質とみなせる領域をＢＥＭでモデル化し、両解法を結合した解析手法の定式化を行い、これをＳＨ波入射の面外波動問題に適用してその妥当性を検討した。

2、定式化

線形の半無限弾性体領域において、平面ひずみ状態を考えるものとすれば、２次元面外定常波動問題の散乱場 u^s の支配方程式は次の Helmholtz の式で表わされる。

$$u^s_{,jj} + k^2 u^s = 0 \tag{1}$$

ここに、$k=\omega/C$ は波数である。この定常ＳＨ波動場の汎関数は、Hu-Washizu の定理[1]より次のように表わされる。

$$\pi = 1/2\int_D \{u^s_{,j}u^s_{,j} - (ku^s)^2\}dS - \int_{C_1}\partial u^s/\partial n\,(u^s - \bar{u}^s)\,dC - \int_{C_2} u^s(\partial\bar{u}^s/\partial n)\,dC \tag{2}$$

$$u^s = \bar{u}^s \quad on\ C_1 \qquad , \qquad \partial u^s/\partial n = \partial\bar{u}^s/\partial n \quad on\ C_2$$

ただし、C_1，C_2 はそれぞれ変位境界および応力境界である。

このとき、ＦＥＭ領域に対する汎関数 π_f は、式（２）より次のように与えられる。

$$\pi_f = 1/2\int_D \{u^s_{,j}u^s_{,j} - (ku^s)^2\}dS - \int_{C_2} u^s(\partial\bar{u}^s/\partial n)\,dC \tag{3}$$

ＦＥＭ領域の各節点での値を u^s_i，内挿関数を N_i とし、各ＦＥＭ要素内の値が $u^s = N_i\ u^s_i$ で表わされるものとすると、式（３）は停留化され、次式を得る。

$$\int_D\{(\partial N_i/\partial x)(\partial N_j/\partial x)u^s_j + (\partial N_i/\partial y)(\partial N_j/\partial y)u^s_j - k^2 N_i(N_j u^s_j)\}dS - \int_{C_2} N_i(\partial\bar{u}^s/\partial n)\,dC = 0 \tag{4}$$

これをマトリックス表示すると次のようになる。

$$K_f u^s = F_f \qquad , \qquad F_f = \int_{C_2} N_i(\partial\bar{u}^s/\partial n)\,dC \tag{5}$$

次に、ＢＥＭ領域についても同様にして、その汎関数 π_b は式（２）に Gauss の発散定理を用いることにより式（６）のように得られる。

$$\pi_b = 1/2\int_C u^s(\partial u^s/\partial n)\,dC - \int_{C_1}\partial u^s/\partial n\,(u^s - \bar{u}^s)\,dC - \int_{C_2} u^s(\partial\bar{u}^s/\partial n)\,dC \tag{6}$$

ここで、$C = C_1 + C_2$ である。ＢＥＭ領域を間接法によって定式化すると、波動場は次のように表わされる。

$$u^s_i = C_{ij} f_j \quad (7) \qquad , \qquad \partial u^s/\partial n_i = D_{ij} f_j \quad (8)$$

ただし、C_{ij}，D_{ij} は、それぞれ $\int_C G_{ij}\,dC$ および $\delta_{ij}/2 + \int_C \partial G_{ij}/\partial n\,dC$ を離化したものであり、また、f は積分密度，G は基本解である。

ＦＥＭ領域との結合が容易なように分割区間の端点での値を u^s_i とし、法線導関数は区間で一定で区間中点の値によって評価するものとして　式（７），（８）を用いると、式（６）の汎関数は次のように停留化され、次の式（９），（１０）が得られる。

$$A_{ij} f_j - r_i + B_{ij}\bar{u}^s_j = 0 \tag{9}$$

$$B_{ji} f_i = 0 \tag{10}$$

上式中、A_{ij}，B_{ij} および r_i は次のように与えられる。

$$A_{ij}=-1/4\sum_{\ell}^{C_1}\{(C_{\ell i}+C_{\ell+1,i})D_{\ell j}+(C_{\ell j}+C_{\ell+1,j})D_{\ell i}\}dC_\ell$$
$$+1/4\sum_{m}^{C_2}\{(C_{mi}+C_{m+1,i})D_{mj}+(C_{mj}+C_{m+1,j})D_{mi}\}dC_m$$
$$B_{ij}=1/2\sum_{\ell}^{C_1}(D_{\ell i}dC_\ell+D_{\ell-1,i}dC_{\ell-1})$$
$$r_i=1/2\sum_{m}^{C_2}(C_{mi}+C_{m+1,i})\partial\bar{u}^s/\partial n_m\,dC_m$$

式（9），（10）に、BEM領域とFEM領域の結合境界上での連続および釣合い条件を適用すれば、BEM領域に対して次のマトリックス表示式を得る。

$$K_b u^s=F_b\quad,\quad K_b=-B^TA^{-1}B\quad,\quad F_b=B^TA^{-1}r \tag{11}$$

FEM領域における式（5）とBEM領域の式（11）は全く同形であるので、両者を重ね合わせて通常のFEMのプログラムを主体として表わせば、

$$\begin{bmatrix} K_f & \\ & K_b \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_f^s \\ u_{f+b}^s \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_f \\ F_f+F_b \end{Bmatrix} \tag{12}$$

となり、これより散乱場u_i^sが求まるので、全体場u_iは自由場u_i^oとの和として$u_i=u_i^s+u_i^o$で得られる。

3．数値解析および解析結果

本手法の妥当性については　すでに検討が為されているが[2)]本報告では無限領域の基本解を用いてBEMの定式化を行い、半無限境界を有限長さELで近似して計算を行った。まず、Fig.1に円形空孔の場合の半無限境界上の積分密度fの分布を示すが、これまでに著者らが得た結果[3)]とほぼ一致していることが判る。この場合の孔壁ライニング上の変位振幅をFig.2に示すが、他の解析結果[4)]と一致していることが判る。Fig.3は、三角形渓谷の渓谷表面上の変位振幅を計算したものであるが、やはり良い結果が得られている。その他、詳細については当日に報告する予定である。

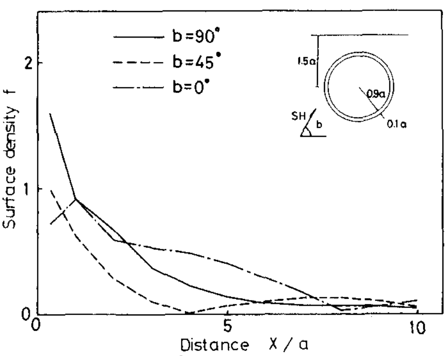

Fig. 1

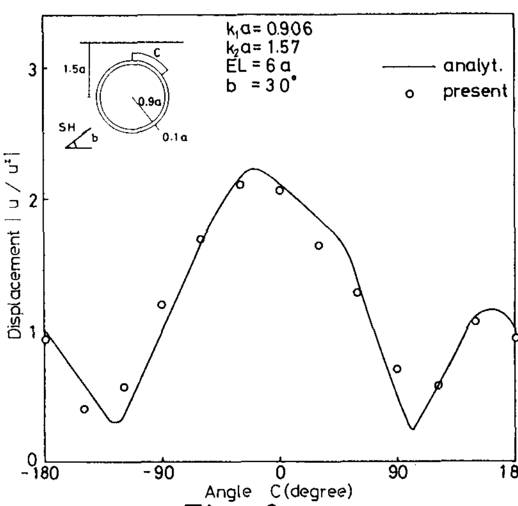

Fig. 2

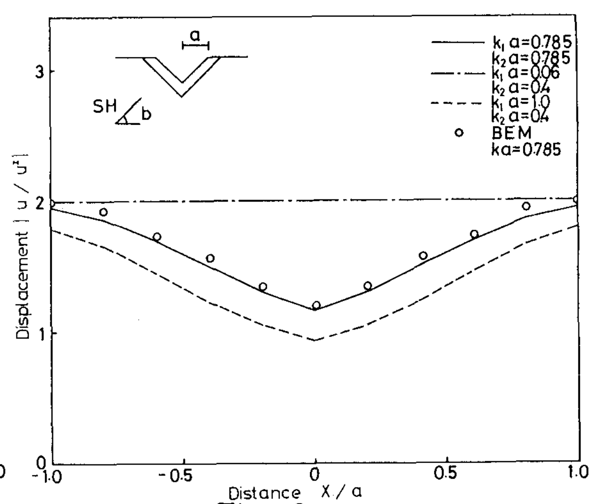

Fig. 3

〈参考文献〉

1) K. Washizu, Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1975.
2) 大津政康，変分原理に基づいた結合解析，境界要素法論文集，第2巻，1985.
3) M. Ohtsu, Analysis of SH wave scattering in a half-space and its applications to Seismic Responces of Geologic Structures, Engineering Analysis, Vol. 2, No.4, 1986.
4) S. Kobayashi, Some Problems of The Boundary Integral Equation Method in Elastodynamics, Proc. 5th. Int. BEM in Eng., 1983.