# Ⅰ-356　半無限弾性体上の円板の水平並進モードの動的コンプライアンス

埼玉大学工学部　学生員　宿谷　勝
埼玉大学工学部　正会員　東原紘道

## 1．研究の目的

半無限弾性体上にあって単振動する円板の動的コンプライアンス問題は，構造物と地盤の動的相互作用の研究にとって一つの重要な理論的基礎を与える。本研究は，そのうちの水平並進モードについて，一つの新しい定式化の方法を提案し，そのための基本的公式を与えるものである。

## 2．理論式

以下では，既往の研究に倣って，半無限弾性体と円板の接触応力について，いわゆる緩和された境界条件を用いる。すなわち，接触面では垂直応力はゼロであるとする。この問題は剛体円板に対しては"ｄｕａｌ　ｉｎｔｅｇｒａｌ　ｅｑｕａｔｉｏｎｓ"法によって定式化されている。

$$\phi_1(r) + \int_0^R [K_{11}(r;s)\phi_1(s)+K_{12}(r;s)\phi_2(s)]ds = 1$$
$$(1-\nu)\phi_2(r) + \int_0^R [K_{21}(r;s)\phi_1(s)+K_{22}(r;s)\phi_2(s)]ds = 0 \qquad (1)$$

ただし，Ｒは円板の半径;　$\nu$はポアッソン比。
この連立積分方程式の解を用いると，動的コンプライアンスが次式から計算される。

$$(2-\nu)T = 8\mu u\int_0^R \phi_1(s)ds \qquad (2)$$

ここに，ｕは水平変位;　Ｔは水平加振力。
同様に，接触面のせん断力も$\phi_1$と$\phi_2$から計算される。しかし，この公式の方は$\phi$の微分と積分の組み合わせから成っているため，その数値計算の精度は相当に悪いと推測される。Ｌｕｃｏらは式（１）を差分法によって求めている。

Ｄｕａｌ　ｉｎｔｅｇｒａｌ　ｅｑｕａｔｉｏｎｓ　法とは別に，接触面の変位と応力を直接に結びつける積分方程式による定式化が可能である。すべての鉛直モードおよび水平ねじれモードに対する公式および数値計算例は既に得られているので，ここでは残されている水平並進モードに対する計算結果を掲げる。
ここでは式（１）に代わって次式が基本方程式である。

$$u_r(r) = \int_0^R s[U_{11}(r;s)\tau_r(s)+U_{12}(r;s)\tau_\theta(s)]ds$$
$$u_\theta(r) = \int_0^R s[U_{12}(s;r)\tau_r(s)+U_{22}(r;s)\tau_\theta(s)]ds \qquad (3)$$

ここに
$$U_{11}(r;s)=[A(r;s)+B(r;s)]-[C(r;s)+C(s;r)]$$
$$U_{22}(r;s)=[A(r;s)+B(r;s)]+[C(r;s)+C(s;r)] \qquad (4)$$
$$U_{12}(r;s)=-A(r;s)+B(r;s) + C(r;s)-C(s;r)$$

$$A(r;s)= -\frac{2(2-\nu)}{\pi r}\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-(s/r)^2\cos^2 t}} - \pi b^2\frac{\kappa\sqrt{\kappa^2-b^2}}{F'(\kappa)}H_0(\kappa r,\kappa s) \qquad (5)$$

$$+\int_0^b [b^2 k\sqrt{b^2-k^2}F_0(k) + \frac{k}{\sqrt{b^2-k^2}}]H_0(kr,ks)dk$$

ここに F' は関数Fの導関数であり，$\kappa$はFの0点である。

$$F(x) = (2x^2-b^2)^2-4x^2\alpha\beta \tag{6}$$

ただし　$\omega$は加振振動数;　$\alpha^2=k^2-a^2$;　$\beta^2=k^2-b^2$;　$a=\omega/V_p$;　$b=\omega/V_s$.

$$F_0(x)=\frac{1}{(2x^2-b^2)^2+4x^2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots a>x>0 \tag{7}$$

$$=\frac{(2x^2-b^2)^2}{(2x^2-b^2)^4+16x^4(x^2-a^2)(b^2-x^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots b>x>a$$

$$B(r,s)=-\frac{2(2-\nu)}{\pi r}\int_0^{\pi/2}\frac{[2\cos^2 t-(s/r)^2]\cos 2t}{\sqrt{1-(s/r)^2\cos^2 t}}dt - \pi b^2\frac{\kappa\sqrt{\kappa^2-b^2}}{F'(\kappa)}H_2(\kappa r,\kappa s) \tag{8}$$

$$+\int_0^b [b^2 k\sqrt{b^2-k^2}F_0(k) + \frac{k}{\sqrt{b^2-k^2}}]H_2(kr,ks)dk$$

m＝0，2に対しては次式を適用する:

$$H_m(x,y)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin|x\cdot\sin\theta_1-y\cdot\sin\theta_2|\cos(m\theta_1)\cos(m\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 \tag{9}$$

$$+[J_m(x)N_m(y)+J_m(y)N_m(x)]/2 + iJ_m(x)J_m(y)$$

$$N_m(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\cdot\sin\theta)\cos(m\theta)d\theta \tag{10}$$

$$C(r,s)=\int_0^b [b^2 k\sqrt{b^2-k^2}F_0(k)-\frac{k}{\sqrt{b^2-k^2}}]H_1(kr,ks)dk-\pi b^2\frac{\kappa\sqrt{\kappa^2-b^2}}{F'(\kappa)}H_1(\kappa r,\kappa s)+C_0(r,s) \tag{11}$$

ただし

$$C_0(r,s)=\frac{2\nu}{\pi r}\int_0^{\pi/2}\frac{1-2(s/r)^2\cos^2 t}{\sqrt{1-(s/r)^2\cos^2 t}}dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots r>s \tag{12}$$

$$=-\frac{2\nu}{\pi r}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(2t)}{\sqrt{1-(s/r)^2\cos^2 t}}dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots s>r$$

$$H_1(x,y)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin|x\cdot\sin\theta_1-y\cdot\sin\theta_2|\cos(2\theta_1)d\theta_1 d\theta_2 \tag{13}$$

$$+[J_2(x)N_0(y)+J_0(y)N_2(x)]/2+iJ_2(x)J_0(y)$$

以上により，式（3）中の積分核はすべて容易に計算される。その正則部分は正則関数の区間（0，b）上の積分で与えられ，その特異部分もまた区間（0，$\pi$）上の積分で与えられる。式（3）の対象は剛体円板には限定されない。そして上部構造の運動方程式と連立させられ，その解によって動的相互作用は完全に解かれる。

## 3．結果の検証－剛体円板の静的応答

円板が剛体であるときには，$u_r$ ＝Δ，$u_\theta$ ＝－Δ　である。さらに$\omega\downarrow 0$のとき，A，B，Cはそれぞれ特異部分のみとなる。このときには式（3）は解析的に計算され，次のような解を得る。

$$\tau_r(r) = \tau_\theta(r) = -\frac{4\mu\Delta}{\pi(2-\nu)}\frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}} \tag{14}$$

これは，変数変換によって，古典的によく知られた次式になる。

$$\tau_x(r)=-\frac{4\mu\Delta}{\pi(2-\nu)}\frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}},\quad \tau_y(r)=0 \tag{15}$$