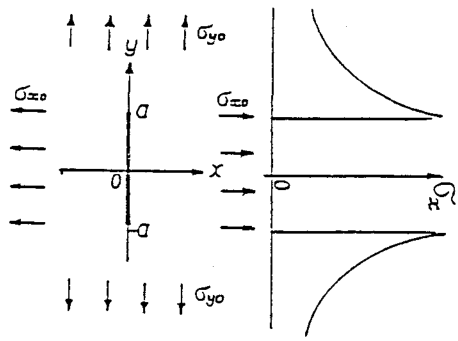
I-251 クラックの先端で有限な応力を与える応力関数のＪ積分について

岐阜大学 工・土木工学専攻 学生員 ○ 藤井康寿
岐阜大学 工・土木工学専攻 学生員 矢崎博芳
岐阜大学 工・土木工学科 正会員 中川建治

1 まえがき

著者等は、図－1に示すような直線上のクラックを含む無限板が引張りを受ける場合の応力関数にρ(a) を乗じつつクラックの長さa ついて区間(a,a＋b)にわたって積分することによって得られる解H(x,y,a,b) について研究している。本学会の研究発表「クラックの先端で有限な応力集中を与える応力関数」において2次元と3次元のクラックのモードⅠ，Ⅱ についてもおなじように重み積分法で有限な応力集中を実現し得ることを紹介している。本研究では2次元のモードⅠの場合に限ってこのような応力関数よりえられるクラックにおいてエネルギー解放率（Ｊ積分）がどのようになるかを報告したい。



図－1 基本的な解

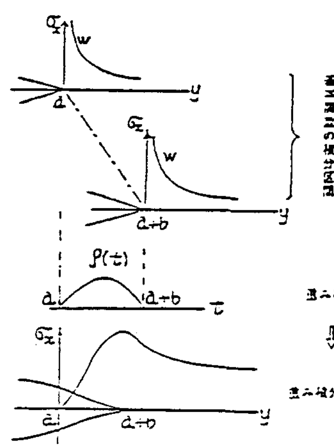
2 Ｊの導き方

図－2に示すように従来のクラックの応力関数に重みρ(t)(a＝tとする）を乗じて積分するのが本研究の特徴であり、重みρ(t) は図－3に示すようなものとする。

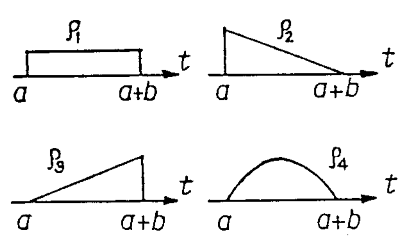
クラック部分の開口変位の形状は図－4に示す。先端の曲率が従来のものと異なっているのが大きな特徴である。 y軸上の遷移区間(a,a＋b)の応力分布はそれぞれ図－5に示すようなものになるので図－4の変位u(y:a,b)と共に次のようにしてエネルギー解放率Ｊを導く。

1）区間 |y| ≦a＋b で直線上のクラックを持ち、無限遠方で一様引張り応力σ_{x0}を受ける板が、同時にクラック部分でも一様応力σ_{x0}を受けているなら完全に一様な応力を受けるクラックのない板とみなし得る。

2）無限遠方の応力はそのままにしてクラック部分の作用応力(当初はσ_{x0})を緩やかに変化させて区間 |y| ＜ aでは0，区間 a＜ |y| ≦ a＋b では図－5の応力σ_x(y:a,b)になるようにする。これによって開口変位は0より図－4のu(y:a,b)へ変化する。この場合にクラック部分で解放されるエネルギー(内部のひずみエネルギーは不問にして、クラック部分の外力仕事分)をWとすると



図－2 基本解と重み関数の積を開口長さの関して積分する



図－3 重み関数の例

$$W(a,b)=2\sigma_{x0}\int_0^{a+b}u(y:a,b)dy + 2\int_a^{a+b}\sigma_x(y:a,b)u(y:a,b)dy$$

となる。エネルギー解放率Ｊとはクラック開口長さa が変化することによるWの変化率（１つのクラック先端部分当たり）であるが、本研究では開口しつつ応力度も存在する部分（長さ a）を先端部分に設定しているので、aの変化に対するWの変化率Ｊa と bの変化に対するものＪb を定義しなければならない。したがって

$$Ja=\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial a}\quad ,Jb=\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial b}$$

とする。

従来のクラック(図－１)におけるＪは平面応力の場合には　$J_0=\sigma_{x0}{}^2 a\pi/E$ となっているので、重み関数 $\rho_1(t)\sim\rho_3(t)$に対する応力と変位より得られるＪa，Ｊb をＪ₀に対する比率としてまとめて図－６に示す(平面ひずみでも同じものとなる）。図中の実線は bを一定として aを変化させたＪa であり点線は aを一定として bを変化させたＪb である。

3　考察

本研究でＪの検討を行ったのは次の理由による。

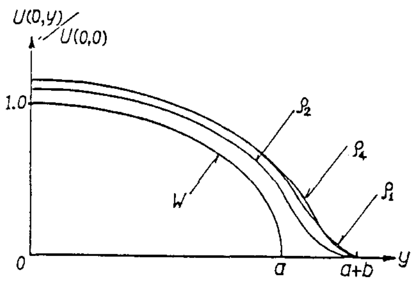
図－２に示すような重み積分によっても数学上の重調和関数という条件は乱れていないので著者等の解は１つの弾性学上の問題の解であることは間違いない。

しかし図－１の従来の解と異なって有限な応力度であり図－４に示すような開口変位と応力度の共存部分を設定するのでエネルギー論的に従来のものと大きな相違があっては好ましくない。

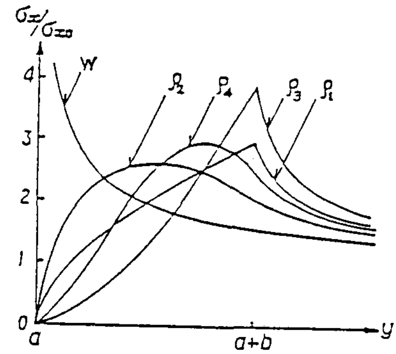
1）Ｊa，Ｊb 共に　$\beta=b/a$の１次式とみなし得る。

2）$\beta=0$では従来のクラックと等しくなるのでＪa=１は当然の結果である。

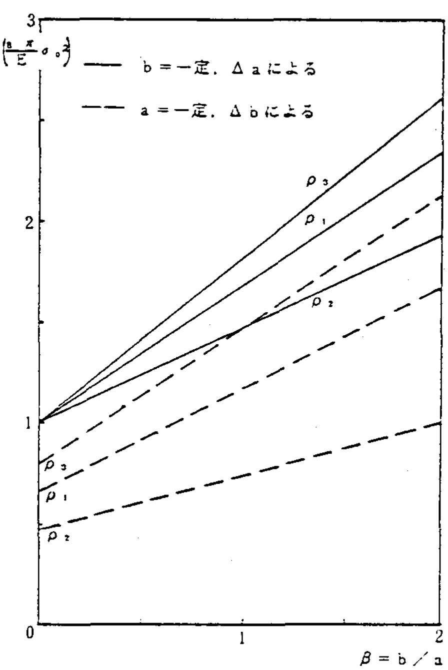
3）Ｊa は aの微少変化Δa に対して遷移区間 bがΔa だけ平行移動（ b=一定）することを意味する。もしクラック先端の a+b 点は不動であってΔa の変化とするなら、 bの分はΔb ＝－Δa の変化として加算されるべきである。しかしこのような場合はＪa －Ｊb とするだけでよい。



図－４　開口形状



図－５　各種重みρによる解の応力集中



図－６　エネルギー解放率（aの変化とbの変化によるもの）