

I-248

非線形破壊力学に於けるポテンシャル論的方法について

京都大学工学部 正会員 西村 直志

1 序

ポテンシャル論の力学への応用として積分方程式法がよく知られているが、本報ではある種の非線形構成関係も仮定して、破壊力学に於けるポテンシャル論の解析的、及び数値的応用について述べる

2 定式化

Bodner は、自分自身のモデル(Bodner & Patra)が、多くの金属の粘性挙動を正しく記述し得るものであると主張している。その B-P モデルは次の様な表示を有する非線形 Maxwell 粘性モデルである:

$$\dot{\epsilon}^p = D_0 \frac{\dot{\sigma}}{J_2} \exp \left[-A^n / 2 J_2^n \right], \quad (\dot{\sigma} = \dot{\sigma} - \frac{1}{\eta} \text{tr} \dot{\sigma}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \dot{\sigma} \cdot \dot{\sigma}') \quad (1)$$

ここに $\dot{\epsilon}^p$ は粘(型)性変速度, σ は応力, D_0, n は定数, A は一般には履歴に依存する数である. A が定数の場合を, 仮らば完全塑性と呼んでいる. このモデルの最大の特徴は $\dot{\epsilon}^p$ が有界である事である. これを一般化し, Small Scale Yielding 条件を考慮して, 半無限クランク $X_1 < 0, X_2 = 0$ に対する次の問題を考える:

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{\underline{C}} [\nabla \underline{\underline{u}}] - \text{div } \underline{\underline{\sigma}}^i &= 0 \quad \text{in } R^2 \setminus (X_1 < 0, X_2 = 0), \quad \underline{\underline{u}} \rightarrow 0 \quad (r^{1/2}) \quad \text{as } r = |x| \rightarrow \infty, \\ (\underline{\underline{C}} [\nabla \underline{\underline{u}}] - \underline{\underline{\sigma}}^i) \cdot \underline{\underline{n}} &= 0 \quad \text{on } (X_1 < 0, X_2 = 0), \quad (\underline{\underline{n}} = (0, 1)), \\ \underline{\underline{u}}|_{t=0} &= \text{tr} (K_I^\infty \underline{\underline{f}}_I(\theta) + K_{II}^\infty \underline{\underline{f}}_{II}(\theta)) \quad \text{in } R^2 \setminus (X_1 < 0, X_2 = 0), \quad (2 \text{ a, b, c, d}) \end{aligned}$$

ここに $\underline{\underline{C}}$ は弾性定数(等方), $\underline{\underline{u}}$ は変位, $\cdot = \frac{d}{dt}$ (t : 時間), $K_I^\infty, K_{II}^\infty$ は対応する線形弾性問題の応力拡大係数, $\underline{\underline{f}}_{I, II}$ はモード I, II の漸近解(線形弾性)の角度依存を表わす関数, $\underline{\underline{\sigma}}^i = \underline{\underline{C}} [\underline{\underline{\epsilon}}^p]$ であり $\underline{\underline{\sigma}}^i$ は有界かつ十分遠方で 0 になるとする. $\underline{\underline{u}}$ の無限遠での挙動の物理的意味は, 遠方での応力が時間に依存しないという事である. この時 Crack 面で traction-free 条件を満たす Green 関数(静弾性学の) $\underline{\underline{G}}$ を用いると $\underline{\underline{u}}$ は

$$\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{x}}) = \int_{R^2} \nabla_{\underline{\underline{y}}} \underline{\underline{G}}(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{z}}) \cdot \underline{\underline{\sigma}}^i(\underline{\underline{y}}) dV_{\underline{\underline{y}}} \quad (\underline{\underline{u}}_R = \int_{R^2} \partial_{y_j} G_{kj}(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{z}}) \sigma_{kj}^i(\underline{\underline{y}}) dV_{\underline{\underline{y}}}) \quad (3)$$

と書ける. モード II では応力計算の簡便上から応力関数中 $(\sigma_{3i} = e_{ij} \phi_{,j})$ を用いる事にすれば,

$$\phi(\underline{\underline{x}}) = \int_{R^2} \partial_{y_j} G(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{z}}) e_{jk} \sigma_{,k}^i(\underline{\underline{y}}) dV_{\underline{\underline{y}}} \quad (\sigma_{,k}^i := \sigma_{,k}^i) \quad (4)$$

が得られる. $\underline{\underline{G}}$ は煩雑であるので省略するが $\underline{\underline{G}}$ については次の様な表示を有する:

$$G(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{z}}) = -\frac{1}{4\pi} \log \frac{(\sqrt{z} - \sqrt{z_0})(\sqrt{\bar{z}} - \sqrt{\bar{z}_0})}{(\sqrt{z} + \sqrt{z_0})(\sqrt{\bar{z}} + \sqrt{\bar{z}_0})} \quad (z = y_1 + iy_2, z_0 = x_1 + ix_2) \quad (5)$$

3 解析的応用

具体的な $\underline{\underline{G}}, G$ の形について調べてみれば解る様に, 一般に次の事が成立つ:

$$\begin{aligned} r \nabla G(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{z}}), r \nabla G(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{z}}) \\ = \begin{cases} (\frac{r}{r_0})^{1/2} \underline{\underline{E}}^1(\theta, \theta_0) + (\frac{r}{r_0}) \underline{\underline{E}}^2(\theta, \theta_0) + (\frac{r}{r_0})^{3/2} \underline{\underline{E}}^3(\theta, \theta_0) + \dots & (r < r_0) \\ \underline{\underline{E}}^0(\theta) + (\frac{r}{r_0})^{1/2} \underline{\underline{E}}^1(\theta, \theta_0) + (\frac{r}{r_0}) \underline{\underline{E}}^2(\theta, \theta_0) + (\frac{r}{r_0})^{3/2} \underline{\underline{E}}^3(\theta, \theta_0) + \dots & (r_0 < r) \end{cases} \quad (6) \end{aligned}$$

ここに (r, θ) ((r_0, θ_0)) は点 $\underline{\underline{z}}$ ($\underline{\underline{z}}$) の tip を中心とする極座標である. これらを用いて, (3), (4) は

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dr \int_{-\pi}^\pi d\theta F^{(2)}(\theta) \cdot \underline{\sigma}^i(r, \theta) + r_0^{1/2} \int_0^\infty dr \int_{-\pi}^\pi d\theta r^{-1/2} F^{(2)}(\theta, \theta_0) \cdot \underline{\sigma}^i(r, \theta) - r_0 \log r_0 \int_{-\pi}^\pi F^{(2)}(\theta, \theta_0) \cdot \underline{\sigma}^i(0, \theta) d\theta \\ & + \left\{ \int_{-\pi}^\pi [pf \int_0^\infty r (\nabla \underline{G}, \nabla \underline{G}) dt + r_0 \log r_0 F^{(2)}(\theta, \theta_0)] \cdot \underline{\sigma}^i(0, \theta) d\theta \right. \\ & \left. + r_0 pf \int_0^\infty dr \int_{-\pi}^\pi d\theta \frac{F^{(2)}(\theta, \theta_0)}{r} \cdot \underline{\sigma}^i(r, \theta) \right\} + o(r_0) \quad \text{as } r_0 \downarrow 0 \quad (7) \end{aligned}$$

の様に漸近展開できる。ここに pf は有限部分を表わす。上式に於いて1項目は定数項、2項目は $1/r_0$ 形特異性、3項目は $O(r_0 \log r_0)$ の項、4項目（ $\{ \}$ 内）は $O(r_0)$ の項である。実際に計算を行つてみるとモード I, II の場合、 $r_0 \log r_0$ の項は0でよい事かわかる。従つて応力、歪は $1/r_0$ 以外に $\log r_0$ の特異項を有する事となる。モード III の場合については上式より

$$\underline{\sigma}^i = \frac{\dot{K}_{III}(t)}{\sqrt{r_0}} \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 \end{pmatrix} - \left(\int_0^{\theta_0} (\sin 2\theta \dot{\sigma}_{10}^i - \cos 2\theta \dot{\sigma}_{20}^i) d\theta + \cos \theta_0 (\cos \theta_0 \dot{\sigma}_{10}^i + \sin \theta_0 \dot{\sigma}_{20}^i) \right. \\ \left. - \int_{\theta_0}^\pi (\cos 2\theta \dot{\sigma}_{10}^i + \sin 2\theta \dot{\sigma}_{20}^i) d\theta + \sin \theta_0 (\cos \theta_0 \dot{\sigma}_{10}^i + \sin \theta_0 \dot{\sigma}_{20}^i) \right) + o(1),$$

$$\dot{K}_{III}(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dr \int_{-\pi}^\pi d\theta r^{1/2} (-\sin \frac{3\theta}{2} \dot{\sigma}_1^i + \cos \frac{3\theta}{2} \dot{\sigma}_2^i), \quad (8a, b)$$

が得られる。ここに $\dot{\sigma}_{j0}^i := \dot{\sigma}_j^i|_{r=0}$ 。 (8a, b) を導くに当つては $\dot{\sigma}_1^i(\cdot, -\theta) = -\dot{\sigma}_1^i(\cdot, \theta)$, $\dot{\sigma}_2^i(\cdot, -\theta) = \dot{\sigma}_2^i(\cdot, \theta)$ などを用いた。この対称性のために $\log r_0$ の項は落ちる。また (8a) より $O(1)$ の項は local に、又 $O(1/r_0)$ の項は (8, b) より global に決定される量である事わかる。実際前者は $\underline{\sigma}^i$ の $r=0$ での値のみで決まる。

以上の様に、従来は a priori の仮定に基づいて行なわれていた漸近展開をより合理的に求める事が出来る。

4 数値的应用

(3), (4) の数値的应用として、所謂積分方程式法によつてモード III の場合の完全塑性 B-P モデルについて $K_{III}(t)$ 及び $\alpha_1 = 0.0039 K_{III}^{0.2}/A^2$, $\alpha_2 = 0$ での σ_{32} を求めた。解析に於いては (4) に於ける $\underline{\sigma}^i$ を区合一定とし、600 要素を用いた。積分は一切解析的に行つた（これはモード I, II の時にも可能である）。本質的なパラメータは n のみであり、ここでは $n=1$ とした。図1に解析結果を示す。なお (1), (8a) を用いれば

$$\underline{\sigma}^i = \frac{\dot{K}_{III}(t)}{\sqrt{r_0}} \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 \end{pmatrix} + \frac{\mu D_0}{3} \begin{pmatrix} \sin 3\theta/2 + 3 \sin \theta/2 \\ -\cos 3\theta/2 - 3 \cos \theta/2 \end{pmatrix} + o(1) \quad (9)$$

なる表示が得られる。この2項近似 ($K_{III}(t)$ の評価には (8b) を使う) 及び図1に示した応力を比較すると表1に示す結果を得、tip 近傍では (9) が比較的良好な近似である事が結論される。一方図1から明らかに様に、 $1/r_0$ の項一項では相当 tip に近づかない限り、精度良く応力を近似する事は出来ない。

謝辞

数値解析は、Northwestern 大学大学院生の宍見春氏が行ったものである。同氏に感謝の意を表す。

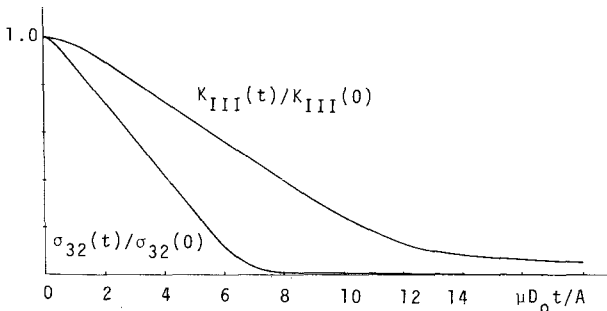


図1 積分方程式法で求めた $K_{III}(t)$, $\sigma_{32}(t)$

$t \mu D_0 / A$	σ_{32}/A	
	2項近似	BIEM
1	14.20	14.22
2	11.70	11.77
3	9.008	9.165
4	6.317	6.622

表 1

文献

1 Bodner, S.R. & Paton Y., J. Appl. Mech. 24, 385, 1975.