I-139　確率伝達マトリックス法による不規則分布荷重を受ける骨組構造系の解析

長崎大学工学部　正員　○岡林 隆敏
横河工事(株)　正員　中川 実

1．はじめに

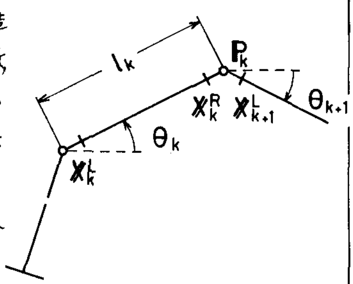
構造物の信頼性解析を行うためには、不確定な荷重による確率論的な応答解析が基礎になる。不規則な分布荷重が作用する静的な解析では，系の挙動を記述する確率微分方程式は境界値問題になるので，従来はグリーン関数により解析的に応答の分散をもとめていた。しかし、この解法では，多径間連続ばり，骨組構造系等の比較的複雑な構造系や外力の自己相関関数が複雑な関数形をしている場合，解析が困難になる制約があった。著者らは，このような構造系や荷重条件の場合でも解析が可能であり、計算機を有効に活用できる解析手法である確率伝達マトリックス法を提案[1][2][3][4]し，不規則分布荷重が作用する各種の構造系の解析を行っている。本報告は，これらの研究の総括として一般的な式の表現を提示すると共に，本解法で得られた結果に検討を加えたものである。

2．構造系－荷重系の状態空間表示

図－1のようなk部材の状態変数$\mathbb{Y}_k(x)$を次式で表す。

$$\mathbb{Y}_k(x)=\begin{bmatrix} {}_1\mathbb{Y}_k(x) \\ {}_2\mathbb{Y}_k(x) \end{bmatrix} \text{-----------------} (1)$$

ここで，${}_1\mathbb{Y}(x)$：構造系のY_1次元の状態変数 ${}_2\mathbb{Y}(x)$：中間支点がある場合Y_2次元の新しい未知数．構造系の状態方程式は次式で与えられる。



図－1　k部材

$$\left.\begin{aligned} &d\mathbb{Y}_k(x)/dx = \\ &+\mathbb{A}_{Yk}(x)\mathbb{Y}_k(x) \\ &+\mathbb{A}_{YZk}(x)\mathbb{Z}_k(x) \\ &\text{境界条件}：\mathbb{Y}_1(0)=\mathbb{Y}_0,\ \mathbb{Y}_n(l_n)=\mathbb{Y}_e \end{aligned}\right\} \text{----} (2)$$

$\mathbb{Z}_k(x)$：不規則分布荷重を構成するm次元の定常過程ベクトルである。任意の相関を有する定常過程は，荷重系の定常解過程として得られる。

$$d\mathbb{Z}_k(x)/dx=\mathbb{A}_Z\mathbb{Z}(x)+\mathbb{B}_Z d\mathbb{N}_Z(x) \text{---} (3)$$

$\mathbb{N}_Z(x)$：平均値$\mathbb{0}$，強度行列$\mathbb{Q}_Z$の白色雑音ベクトル。

構造系－荷重系の状態方程式は，次式で表される。

$$\mathbb{X}_k(x)=\begin{bmatrix} \mathbb{Y}_k(x) \\ \mathbb{Z}_k(x) \end{bmatrix} \text{---------------} (4)$$

$$\left.\begin{aligned} &d\mathbb{X}_k(x)/dx=\mathbb{A}_{Xk}(x)\mathbb{X}_k(x)+\mathbb{B}_{Xk}\mathbb{N}_k(x) \\ &\text{境界条件}：\mathbb{X}_1(0)=\mathbb{X}_0,\ \mathbb{X}_n(l_n)=\mathbb{X}_e \end{aligned}\right\} \text{--} (5)$$

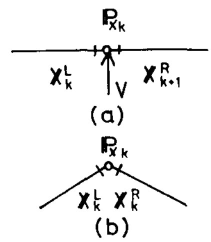
ここに，$\mathbb{N}_{Xk}(x)$は，平均値$\mathbb{0}$，共分散が

$$E[\mathbb{N}_{Xk}(x_1)\mathbb{N}_{Xk}(x_2)]=\mathbb{Q}_{Xk}\delta(x_1-x_2) \text{----} (6)$$

である白色雑音ベクトルである。

3．節点マトリックスと境界条件の処理

中間支点や接合部では，節点マトリックスにより状態変数を伝達する。



図－2　節点行列

k部材右端とk+1部材左端は，k節点の節点マトリックスにより次のように関係づけられる。

$$\mathbb{X}_{k+1}^L=\mathbb{P}_{Xk}\mathbb{X}_k^R \text{--------------} (7)$$

k節点の$\mathbb{X}_k(x)$の節点行列は，

$$\mathbb{P}_{Xk}=\begin{bmatrix} \mathbb{P}_{Yk} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \text{------------} (8)$$

である。中間支点と接合部については，構造系の節点マトリックス$\mathbb{P}_{Yk}$は，それぞれ，

$$\mathbb{P}_{Yk}=\begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{P}_{Yk}^{12} \\ \mathbb{P}_{Yk}^{21} & \mathbb{0} \end{bmatrix}，\quad \mathbb{P}_{Yk}=\begin{bmatrix} \mathbb{C}_k & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{C}_k \end{bmatrix} \text{--} (9)$$

である。ここに，$\mathbb{P}_{Yk}^{12}$，$\mathbb{P}_{Yk}^{21}$：節点の条件により決まるマトリックス，$\mathbb{C}_k$：部材の回転を表すマトリックス。

構造系の始端では，0とならない変数があり，これを$\tilde{\mathbb{Y}}_0$，$\tilde{\mathbb{X}}_0$とすると，次のように表すことができる。

$$\mathbb{Y}_0=\mathbb{B}_Y\tilde{\mathbb{Y}}_0,\quad \mathbb{X}_0=\mathbb{B}_X\tilde{\mathbb{X}}_0 \text{---------} (10)$$

ここに，$\tilde{\mathbb{X}}_0$と$\mathbb{B}_X$は次式で構成される。

$$\tilde{\mathbb{X}}_0=\begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{Y}}_0 \\ \mathbb{Z}_1(0) \end{bmatrix} \qquad \mathbb{B}_X=\begin{bmatrix} \mathbb{B}_Y & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \text{-----} (11)$$

また，終端では，0となる変数を$\tilde{\mathbb{Y}}_e$とすると，次の

ようになる。

$$\tilde{\mathbb{Y}}_e = \mathbb{B}'_Y \mathbb{Y}_e = \mathbb{O} \quad , \quad \tilde{\mathbb{X}}_e = \mathbb{B}'_X \mathbb{X}_e \qquad (12)$$

ここに，$\tilde{\mathbb{Y}}_e$ と $\mathbb{B}'_X$ は次式で構成される。

$$\tilde{\mathbb{X}}_e = \begin{bmatrix} \mathbb{O} \\ \mathbb{Z}_n(l_n) \end{bmatrix} \ , \quad \mathbb{B}'_X = \begin{bmatrix} \mathbb{B}'_Y & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

4. 不規則応答解析

応答は平均値回りの変動のみを考えると，$\mathbb{X}_k(x)$ の共分散は，

$$\mathbb{R}_{Xk}(x) = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_{Yk}(x) & \mathbb{R}_{YZk}(x) \\ \mathbb{R}_{ZYk}(x) & \mathbb{R}_{Zk}(x) \end{bmatrix} \qquad (14)$$

となる。k部材の応答の共分散 $\mathbb{R}_{Xk}(x)$ は，次の共分散方程式で与えられる。

$$d\mathbb{R}_{Xk}(x)/dx = \mathbb{A}_{Xk}(x)\mathbb{R}_{Xk}(x) + \mathbb{R}_{Xk}(x)\mathbb{A}_{Xk}(x)^T + \Phi_{Xk}(x,0)E[\mathbb{X}_k^L \mathbb{F}_{Xk}(x)^T] + E[\mathbb{F}_{Xk}(x)\mathbb{X}_k^{LT}]\Phi_{Xk}(x,0)^T + \mathbb{Q}_{Xk}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{k部材左端条件}：\mathbb{R}_{Xk}(0) = E[\mathbb{X}_k^L \mathbb{X}_k^{LT}] \\ \text{始端・終端条件}：\mathbb{R}_{X0},\ \mathbb{R}_{Xl} \end{array}\right\} \text{---}(15)$$

共分散応答では，節点マトリックスにより次のように変数が伝達される。

$$\mathbb{R}_{Xk+1}^L = \mathbb{P}_{Xk}\mathbb{R}_{Xk}^R \mathbb{B}_{Xk}^T \qquad (16)$$

共分散方程式を解くためには，$E[\mathbb{X}_k^L \mathbb{F}_{Xk}(x)^T]$ と $\mathbb{R}_{X0}$ を求める必要がある。

$$E[\mathbb{X}_k^L \mathbb{F}_{Xk}(x)^T] = -\Lambda(k-1,0)(\mathbb{B}'_X \Lambda(n,0)\mathbb{B}_X)^{-1} \times \mathbb{B}'_X \Lambda(n,k+1)\mathbb{B}_{Xk}\Phi_{Xk}(l_k,x)\mathbb{Q}_{Xk} \qquad (17)$$

$$\mathbb{R}_{X0} = -\mathbb{B}_X(\mathbb{B}'_X\Lambda(n,0),\mathbb{B}_X)^{-1} \times \mathbb{B}'_X \mathbb{H}_X(l)\mathbb{B}_X'^T((\mathbb{B}'_X\Lambda(n,0)\mathbb{B}_X)^T)^{-1}\mathbb{B}_X^T \qquad (18)$$

ここで，

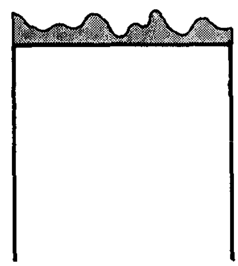
$$\Lambda(K,S) = \mathbb{B}_{Xk}\Phi_{Xk}(l_k,0)\text{---}\mathbb{B}_{Xs}\Phi_{Xs}(l_s\,0)$$

$$\Lambda(0,0) = \mathbb{P}_0,\quad \Lambda(n,n) = \mathbb{P}_n$$

確率伝達マトリックス法では，始端条件 $\mathbb{R}_{X0} = \mathbb{O}$ とした外力項の計算を行い，$\mathbb{H}_X(l)$ を求め，次に(18)式を用いて，始端条件 $\mathbb{R}_{X0}$ を求める。

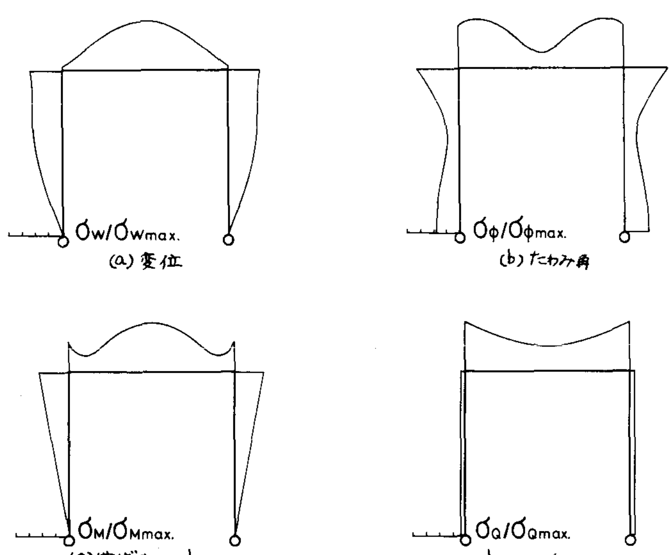
5. 数値解析と考察

数値計算例として，図－3 のように門型ラーメンの上部に白色雑音過程でモデル化された不規則分布荷重が作用した場合を考える。図－4に，支点がヒンジの場合の解析結果を示した。計算結果は，変位，たわみ角，曲げモーメント，せん断力の標準偏差をそれぞれの最大値で基準化した値で示したものである。等分布荷重を載荷させたとき，応答が最大あるいは最小となる点で，変動は大きな値を示している。このような直列型の剛節構造であれば，節点マトリックスを用いて状態変数を接続することにより，任意の構造系の解析は可能である。



図－3　不規則分布荷重

確率伝達マトリックス法でも，数値計算の誤差の累積が大きく，ほぼ厳密解と考えられる限界は4径間程度までである。



図－4　応答の標準偏差

［参考文献］(1) 岡林，浦川，吉田：相関のある不規則分布荷重を受けるはりの解析，土木学会論文集 No. 341（昭和59年1月），(2)岡林，吉田；任意の相関を有する不規則分布荷重を受ける連続ばりの解析，第39回土木学会講演概要集（昭和59年10月）(3)吉田，岡林：任意の相関を有する不規則分布荷重を受けるアーチ部材の解析，土木学会西部支部（昭和60年2月）(4)岡林，第9回構造工学における数値解析法シンポジウム（昭和60年7月）