I-128　双対法によるはり構造の最適設計法に関する考察

愛媛大学大学院　学生員　○中嶋　毅
愛媛大学工学部　正　員　　大久保　禎二

1　まえがき

著者らは、これまでに、双対法によりトラス構造物の各部材の最適断面積および使用材種を決定する方法に関する研究を行い、その有効性を明らかにしてきたが、[1]本研究では、この方法により、はり構造物の各要素の最適な使用材種および断面寸法をも決定できることを示すものである。

2　双対法によるはり構造の最適設計法

桁高が一定のはり構造物の設計問題において、はり要素の断面寸法および材種選択に関する設計変数として、それぞれ各要素の断面積Aおよび使用材種Mを用いることとし、はり構造物の製作費あるいは重量などの目的関数Wが、Aに関する一次の項の和として次式のごとく表わされるものとする。

$$W(A, M)=\Sigma \rho_i(M_i)\cdot \ell_i\cdot A_i=\Sigma W_i(M_i)\cdot A_i \qquad (1)$$

ここに、ρ_iおよびℓ_iは、それぞれはり要素iに関する目的関数の特性を表わす定数および要素長である。

また、制約条件gとして、各はり要素の縁応力度σおよび着目点のたわみδに関する条件を考慮するものとすると、制約条件式は各はり要素の断面2次モーメントIと使用材種Mの関数として次式のように表わされる。

$$g_{\sigma j}(I, M)=|\sigma_a(M_j, I_j)|-|\sigma_j(I)|\geq 0$$
$$g_{\delta k}(I, M)=|\delta_{ak}|-|\delta_k(I)|\geq 0 \qquad (2)$$

文献〔1〕で述べたように、双対法によりトラス構造物の最適なAおよびMを決定する場合には、目的関数Wを部材断面積Aの逆変数Z＝1／Aで表わすとともに、制約条件gをZおよびMの1次式で近似することにより、設計問題のラグランジュ関数を最小にするZあるいはAの値が関数式で与えられ、設計法を極めて単純化することができる。そこで、はり構造の最適設計問題においても、式(2)の制約条件をAおよびMで表現することができれば、文献〔1〕で述べた方法によって各はり要素の最適なAおよびMを決定することができる。

いま、図-1に示すような桁高hが一定のI形のはり断面について、断面2次モーメントIと断面積Aとの関係を求めると、次のような関係式を導入することができる。

$$I=h^2/2\cdot(A-bh)/2+bh^3/12 \quad （ただし、腹板の高さ h 及び厚さ b は一定） \qquad (3)$$

この関係式を式(2)に代入することにより、応力およびたわみに関する制約条件式をAおよびMの関数として表現でき、文献〔1〕で提案している次のような設計アルゴリズムにより、各はり要素の最適なAおよびMを決定することができる。すなわち、

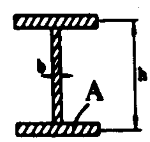

図-1　I形断面形状

（1）原設計問題を、式(1),(2)および(3)を用いて断面積Aおよび使用材種Mを設計変数とする設計問題に変換する。
（2）逆変数ZおよびMに関する近似問題を作成し、そのラグランジュ関数を導入する。
（3）準ニュートン法を用いてラグランジュ関数が最大となる双対変数λを決定する。
（4）（3）で求めた双対変数λを用いて、ラグランジュ関数が最小となる各はり要素の断面積A及び使用材種Mを決定する。この場合、1回の反復改良における材種Mの変化可能な範囲を、使用材種の1ランク上位あるいは下位の材種に限定する。
（5）解が収束条件を満足するまで（2）～（4）のλ，A，Mの改良過程を繰り返す。
（6）最適なはりの桁高h_{OPT}は、種々の桁高に対して上記の（1）～（5）により得られた解を比較することにより決定する。

上記の設計アルゴリズムに使用する応力およびたわみに関する制約条件のAに関する偏微係数$\partial g/\partial A$は、はり構造物の解析式を式(3)のIとAの関係式を用いてAの関数として表現することにより容易に計算することができる。また、弾性係数が異なる材種群から、各はり要素の最適使用材種を選択するための応力およびたわみに関する制約条件のMに関する偏微係数$\partial g/\partial M$も、文献〔1〕の方法を用いて次式より計算することができる。なお、次式において、A_i^0，M_i^0は、それぞれはり要素iの改良前の断面積および使用材種である。

$$\left.\begin{aligned}\partial g_{\sigma j}/\partial M_i &= |\sigma_a(M_i)| - |\sigma_a(M_i^0)| - \left[\frac{\partial|\sigma_j|}{\partial A_i}\cdot\frac{A_i^0}{E(M_i^0)}\cdot\left[E(M_i)-E(M_i^0)\right]\right]\\ \partial g_{\delta k}/\partial M_i &= -\frac{\partial|\delta_k|}{\partial A_i}\cdot\frac{A_i^0}{E(M_i^0)}\cdot\left[E(M_i)-E(M_i^0)\right]\end{aligned}\right\}(4)$$

3　設計例及び考察

2で述べた方法により、図-2に示す2径間連続Ｉ形断面ばりの許容たわみ量δ_aを0.5cmとした場合における設計例を図-3及び図-4に示す。この設計問題では、使用材種は表-1に示す弾性係数が異なる７種類の材種群から選択するものとし、目的関数としてはりの総製作費(TCOST)を考え、式(1)のρは、はり要素の単位体積あたりの各材種の相対的な製作費(COSTM)を表わすものとする。また、はりの断面積の下限値は、断面の安定などの条件より各材種によって異なるが、腹板およびフランジの最小断面形状を保持することを考慮して腹板断面積の３倍の値をとることとした。

図-3に示す桁高ｈ＝20.0cmの設計例では、最適解近傍でのアクティブな制約条件(S_{AG})はたわみ制限のみとなり、全てのはり要素の初期材種をたわみ制限に対して最も不利な材種７と仮定しても、各反復改良ごとに確実に改良され、７回の改良でたわみ制限に対して最適な材種１に収束し、その後１回の改良で最適な断面積を得ている。なお、本研究で対象としている弾性係数が異なる材種群の中で使用材種を改良する場合には、弾性係数が等しい材種群の中で使用材種を改良する場合と異なり、ＭとＡの改良により$\partial g/\partial A$の値が大きく変化するため、２で述べた設計アルゴリズムの(3)と(4)において、それぞれ一回づつ$\partial g/\partial A$の計算を行なうことによりＭとＡの改良を確実にすることができる。

また、図-4に示す桁高ｈ＝60.0cmの設計例は、応力およびたわみに関する制約条件の双方がアクティブとなる設計問題の例であるが、４回の改良で最適解の近傍に達した後、ＭおよびＡの値が振動している。このような場合には、振動している２組の使用材種の組み合わせをそれぞれ固定し、はりの断面積のみを変数として最適解を求め、二つの解の目的関数値の大小を比較することにより最適解を決定することができる。このようにして求めた最適解を図-4の横軸におけるOPTの位置に示す。

以上の考察により、文献[1]で提案している最適設計法は、はり構造の解析式におけるＩをＡの関数として表現することによりはり構造物の各要素の最適断面積および材種を決定する設計問題にも有効に適用することができ、かつ、上記の例題で示したように、能率的に最適解を決定できることが明らかとなった。

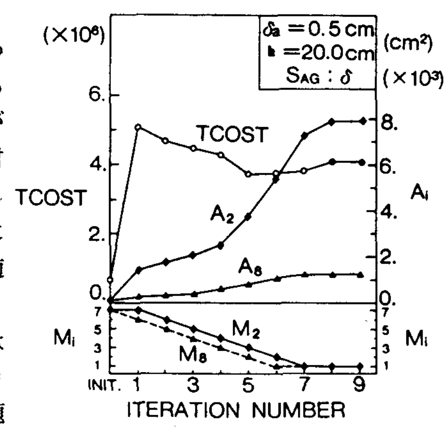

図-3　収束過程　（ｈ＝20.0cm）

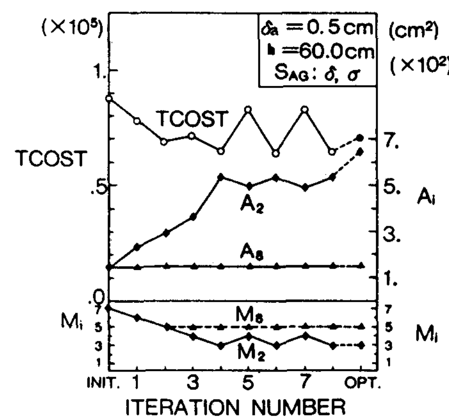

図-4　収束過程　（ｈ＝60.0cm）

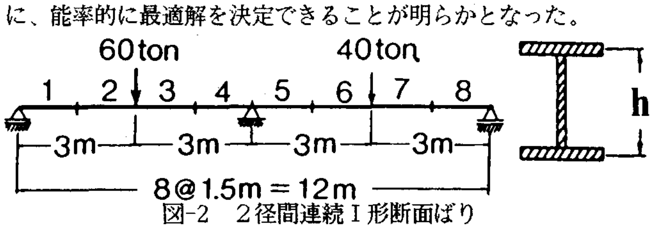

図-2　２径間連続Ｉ形断面ばり

表-1　使用可能材種の材料特性

MATERIAL NUMBER	σ_a (kg/cm²)	E (kg/cm²)	COSTM (1/cm³)
1	140	0.4×10^6	0.75
2	200	0.5	1.00
3	400	0.7	1.45
4	850	1.1	2.50
5	1300	1.4	3.20
6	1700	1.7	4.00
7	2400	2.1	5.10

参考文献 [1] S.Ohkubo and T.Nakajima, "Optimum structural design with element material selection", Structural Engineering & Construction, Pergamon Press. Vol 3, pp.1986-1996, January, 1986 .