

京都大学工学部 正員 ○ 田 村 武

同 正員 小 林 昭 一

神戸製鋼所 正員 仲 山 公 規

1. はじめに 部材断面の形状最適化は、最適設計における一つの基本問題であり、古くから研究がなされている。とくに一定断面積のもとで、最大のねじり剛性をもつ断面形状を決定する問題は、最も著名なものの一つである。ここでは、Banichuk によって提案された手法、すなわち、形状変化をも考慮した変分法による定式化を整理して述べるとともに、有限要素法を用いた数値計算例を示す。

2. 基礎理論 せん断弾性定数 G をもつ棒材のねじりは、式 (1) あるいは式 (2) で表される汎関数 I_1 , I_2 の最小化により、解くことができる。

ここに、 Ω は断面、 $\bar{M}$ は与えられたトルクであり、未知量は、そり関数 ϕ 、単位長さのねじり角 θ および応力関数 Ψ である。なお、式 (2) の I_2 には、制約条件として式 (3), (4) が付随している。式 (1) の θ に関する最小条件より、式 (5) が求まる。これは、 ϕ を含む積分項 [I' と書く] が、その最小値において、ねじり剛性 D そのものになることを示している。

一方、式 (2) の汎関数 I_2 の最小条件を式 (2) に代入すれば、式 (6) を得る。ここに、 λ は式 (3) にかかる Lagrange 乗数 (ねじり角 θ に相当) である。

したがって、与えられた $\bar{M}$ のもとでは、最小値 [式 (6) の左辺] が小さいほど、ねじり剛性が大きいといえる。以上のことより、ねじり剛性を最大にする断面形状の最適化は、式 (7) あるいは (8) として表すことができる。すなわち、未知量 ϕ , θ , Ψ とともに、一定面積条件 [式 (9)] のもとで形状による汎関数の最大 (小) 化を同時に行うことにより、最適化を行うことができる。ここで、 ϕ , θ , Ψ による最小化の条件は従来のねじりの基本式を満足することである。

さて、変分法の理論によれば、領域形状の変化をも含む汎関数の第一変分は、領域形状の変化を含まない部分と、領域形状の変化に伴う境界形状の変動による部分の和となる。先にも述べたように、前者については従来のねじりの基本式が導かれる。一方、後者は、式 (10) のように式 (5) や (2) の被積分関数 [F とする] に境界での面積増分 δS を乗じた項となる。なお、形状変化に関しては面積一定条件 [式 (11)] が課せられているので、式 (12) が求める最適性規準となる。

$$I_1 = \frac{\theta^2}{2} \int_{\Omega} G \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dS - \bar{M} \theta \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{1}{2G} \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right\} dS \quad (2)$$

$$\begin{cases} \bar{M} = 2 \int_{\Omega} \Psi dS \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \Psi = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (4)$$

$$\bar{M} = \theta \int_{\Omega} G \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dS \quad (5)$$

$$\frac{1}{G} \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right\} dS = \lambda \bar{M} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \max_{\Omega} \min_{\phi} I(\phi, \Omega) \\ \text{sub.to (9)} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \min_{\Omega} \min_{\phi} I_2(\Psi, \Omega) \\ \text{sub.to (3), (4), (9)} \end{cases} \quad (8)$$

$$\int_{\Omega} dS = S_0 \quad (9)$$

$$\int_{\partial\Omega} F \delta S d\Delta \quad (10)$$

$$\int_{\partial\Omega} \delta S d\Delta = 0 \quad (11)$$

$$F = \nu (-定) \quad \text{on } \partial\Omega \quad (12)$$

3. 数値解法

応力関数 Ψ を用いる場合を想定して、式(12)の最適性規準の数値解析について述べる。図-1に示すように、4本の座標軸に沿う4点 X_i ($i=1\sim 4$)が動くとする。このとき、内部の有限要素分割もそれにつれて変化する。式(12)は、式(13)なる任意の形状変化に対し、式(14)を満たすという意味であるが、両式はこの場合、式(15)、(16)のように近似される。ここに A_i 、 B_i は、図-1で座標 X_i が δX_i だけ増加したときのそれぞれの増分の割合であり、数値的に積分することにより計算される。

よって、最適性規準はLagrange乗数 ν を用いて式(17)と表すことができる。これと、面積一定条件式(18)と連立することにより、4点 X_i と ν が求まる。なお式(17)、(18)は非線形方程式であり、式(19)、(20)のように増分 ΔX_i を未知数とするNewton-Raphson法により逐次的に解かねばならない。以上まとめる、次のような手順となる。

①初期の位置 X_i について、通常のねじりの問題を解き、内部の Ψ を決定する。

②求めた Ψ を用いて、式(15)、(16)の A_i 、 B_i を求める。(図-1参照)

③1つの座標 X_i を順次 ΔX_i だけ、増加させて、①と②の手順を行う。これで、式(19)、(20)を ΔX_i で展開した方程式の係数が定まる。

④ ΔX_i を解き、新しい座標 X_i を決定する。

⑤ X_i が収束するまで、①~④を繰り返す。

なお、ここで注意すべきは、最適性規準を解析的に求めておいた結果、数値微分は一階のみ行えばよいということである。

3. 計算結果

先述の理論を少し拡張すれば、異方的なせん断弾性定数 G_x 、 G_y をもつ場合にも容易に適用することができる。中実断面では、それらの比の応じた楕円形状において、最大のねじり剛性を発揮する。図-2は、8変数(●)および12変数(★)を用いた場合の長軸と短軸の比が示されている。なお実線は解析解である。図-3に、初期形状からの変形過程の例が示されているが、いずれも4~5回で収束している。

参考文献 1) Banichuk, N.V.: Problems and Methods of ..., Int.J.Solids & Struct., 1976.

$$\int_{\partial\Omega} \delta\delta \, d\Omega = 0 \quad (13)$$

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right\} \delta\delta \, d\Omega = 0 \quad (14)$$

$$\sum A_i \delta x_i = 0 \quad (15)$$

$$\sum B_i \delta x_i = 0 \quad (16)$$

$$\begin{cases} B_i(x_j) = \nu A_i(x_j) \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} S(x_j) = S_0 \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} B_i(x_j + \Delta x_j) = (\nu + \Delta \nu) A_i(x_j + \Delta x_j) \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} S(x_j + \Delta x_j) = S_0 \end{cases} \quad (20)$$

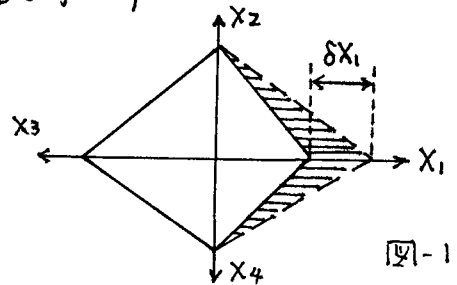


図-1

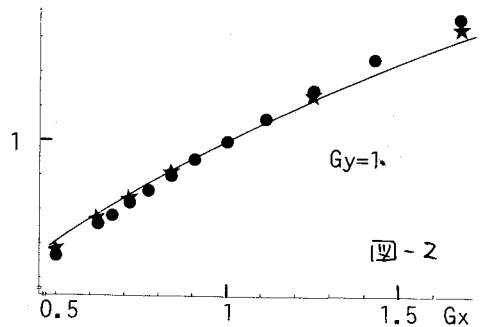


図-2

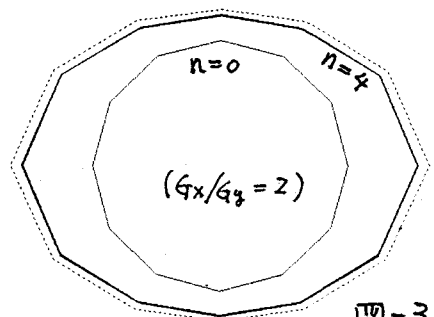


図-3