

群馬 高 専 正員 平田 泰久
 東京都立大学 正員 伊藤 文人

1. まえがき

筆者らは等式制約法と称する探索法について検討を行ってきたが、ここでは等式制約法を多目的計画問題での非劣解 (Pareto 最適解) を求めるときの、非線形最適化手法として適しているかどうかについて考察を行った。等式制約法は活性でかつ有利な制約面である等式制約を掃出し計算により選択する点に特色がある。最初に制約式選択の方法を示し、次にこの仕組みを用いて非劣解を得る方法を説明する。

2. 掃出し計算

双対法ではLagrange乗数 λ による探索で $g_m=0$ となる制約式 ($g \leq 0$ 及び $\lambda \geq 0$ を満足) を選択している。Lagrange関数 $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$ が x で微分可能なら双対法は(1)式で示される。(1)式で x を固定すれば双対法は λ について線形である。(1)式第2行は $L(x, \lambda)$ の微分であるが、 λ による探索がないとすべての x_j について必ず成立するとは限らない。(1)式第2行の左半分のみを用いて(2)式とすると、これは線形計画問題とみなせるので、Simplex法に準じた掃出し計算を行う。 $\frac{\partial L}{\partial x_m}$ はslack変数に相当するが、 $\frac{\partial L}{\partial x_m}, \frac{\partial f}{\partial x_m}$ には非負条件はないので、掃出し計算での軸要素の選択はSimplex法とは若干異なる。

多目的計画問題を扱うときのSimplex-tableauを図-2に示す。1目的計画の場合は目的関数 f_k 列を削除したものにたり、掃出し計算を1目的計画の場合で説明する。 g 行には目的関数 f 、制約式 $-g_i, i=1, \dots, M$ を入れ、 x_j 行、 $j=1, \dots, n$ には $\partial f / \partial x_j, -\partial g_i / \partial x_j$ を入れる。制約条件に抵触していると $-g_i < 0$ であり、これを $-g_i = 0$ となるように掃出す。これが掃出し列の選択であり、掃出し行の選択は(5)式で行う。掃出しにより $\lambda^T g = \Delta f$ が増加していくが、掃出し計算が終了した段階では、①掃出した制約式は $-g_i = 0$ となり、 $-g_i < 0$ は存在しない(活性な制約面) ②掃出し行となった x_j 行 f 列は $\lambda_i \geq 0$ である(有利な制約式) ③掃出し行でない x_j 行 f 列は $\frac{\partial L}{\partial x_j}$ となる(探索方向を示す)。

掃出し計算により $g_i = 0, i=1, \dots, m$, 掃出し行 $x_j, j=1, \dots, m$ が選択できたので、これを等式制約 g_m , 制約変数 x_m とし、残りの変数を探索変数 x_l とする。図-3にtableauの内容を制約変数、探索変数に分けて示すが、 Δx_m 掃出しが上記の掃出し計算である。 Δx_m 掃出しにより第2表の g 行 Δx_m 列に Δx_m が得られており、

これは $g_m = 0$ をNewton法で解くときの Δx_m であるので、 $x_m = x_m + \Delta x_m$ を反復することにより $g_m = 0$ となる活性でかつ有利な制約面が得られる。掃出し計算の反復により(3)式が成立するが、(4)式を成立させるには探索が必要である。探索方向ベクトル Δx_l は第2表の x_l 行 f 列の $\frac{\partial L}{\partial x_l}$ を用いて計算する。 $x_l = x_l + \Delta x_l$ の反復により(4)式が成立すると、

$$\left. \begin{aligned} \max_x \{ & f(x) + \lambda^T g(x) \} \\ \text{sub j. to } & \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{---(1)}$$

$$\left. \begin{aligned} \max_{\lambda} \{ & \lambda^T g + f \} \\ \text{sub j. to } & -\lambda^T \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{---(2)}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_m} = \frac{\partial f}{\partial x_m} + \lambda^T \frac{\partial g}{\partial x_m} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x) \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \lambda = \lambda^T g(x) = 0, \lambda \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{---(3)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_l} = \frac{\partial f}{\partial x_l} + \lambda^T \frac{\partial g}{\partial x_l} = 0 \quad \text{---(4)}$$

$$\lambda_i = \min \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j} / -\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \geq 0 \right\} \quad \text{---(5)}$$

図-1

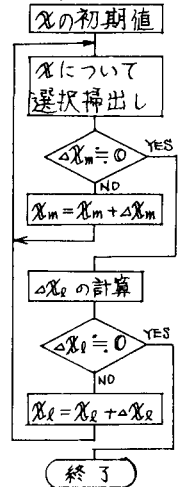


図-2

		基底				目的関数 f_k				制約式 $g_i(\lambda_i)$				slack変数 $\frac{\partial L}{\partial x_j}$			
		f	f_1	$\dots$	f_p	g_1	$\dots$	g_m	$\frac{\partial L}{\partial x_1}$	$\dots$	$\frac{\partial L}{\partial x_n}$						
g									0	0	0				$f_k, -g_i$		
x_j									1						$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$		
										1					$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$		
											1				$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$		
												1				$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$	

↑ λ_m または $\frac{\partial L}{\partial x_l}$

これと(3)式を合わせてKuhn-Tucker必要条件が成立する。等式制約法で最適解を探索するときの概要フローチャートを図-1に示す。

Δx_m 掃出しが終了したとき $\Delta x_m = 0$ になっているが、探索で Δx_e 方向に進むとき Δx_e 掃出しを行うと、制約面に沿うために必要な Δx_m が第3表のg行 Δx_m 列に得られる。 g_m が非線形であるとこれだけでは $g_m = 0$ 上に乗れないので、 Δx_m 掃出しを反復する。

3. 等式制約法で非劣解を求める

多目的計画問題は複数の目的関数を持ち、(6)式で表わされる。制約式は1目的計画と同じであるが、1目的計画のような通常の最適解ではなく、非劣解の集合が得られる。非劣解でなければ他の目的関数と改悪せずにある目的関数を改悪することができるので、多目的計画での唯一の解は非劣解の中から選ばれるべきである。非劣解を得る方法としてスカラ化手法がある、これには、①最大成分最小化法(7)式 ②加重和最小化法(8)式 ③ ε -制約式法(9)式がある。(7),(8)式では $f_R, R=1, \dots, p$ の重み係数 w_R を、(9)式では f_p (f_p 以外の目的関数 $f_R, R=1, \dots, p-1$)の最大値制限 ε_R を変化させることにより種々の非劣解が得られる。

(7)~(9)式のスカラ最適化問題を等式制約法で探索するには図-2のtableauを用いる。f列には最小化すべき目的関数を入れ、掃出し行の選択はf列のみを対象とする。 f_R 列は目的関数としての掃出しは行わなくてもよいものであるが、掃出し計算では f_R 列があっても計算量の増加は小さいので、 f_R 列も掃出ししておくこと f_R についての情報が得られる。(7)式では最大成分 $w_p f_p$ をf列に入れ、探索により $w_p f_p \geq w_R f_R, R=1, \dots, p-1$ が満足できなくなると、新たな最大成分と入れ換える。これは最大成分 $w_p f_p$ についての最小値制限である。(9)式では f_p も制約式 g_{f_R} になるので、符号を変えた $-g_{f_R}, -\frac{\partial f_R}{\partial x_j}$ を入れ、制約式として掃出し計算を行う。(9)式で各 f_R についての最大値制限である $g_{f_R} = f_R - \varepsilon_R$ が活性であるようにするには、 g_{f_R} 列が掃出し列になっていない場合は $-g_{f_R} = 0$ となるように ε_R を小さくして掃出す。(9)式では g_{f_R} のLagrange乗数 λ_{f_R} が f_p と f_R とのtrade-off比(10)式になっており、唯一解の一種である選好最適解を求めるときに利用される。(8)式では重み係数比 $\frac{w_R}{w_p}$ が非劣解での λ_{f_R} になっている。(7)式では λ_{f_R} に相当するものが得られていないが、非劣解に到達したとき f_R を制約式とみなして f_R を掃出すことにより λ_{f_R} が求まる。

4. まとめ

等式制約法を多目的計画法へ応用することを試みたが、①非劣解を求める(7)~(9)式について同じ掃出し計算で扱える ②各目的関数 f_R についても掃出しを行うと f_R についての情報が得られる ③ g_{f_R} を活性化する、 λ_{f_R} を求める等が掃出しにより簡単にできる ④等式制約法ではLagrange乗数を常に計算しているのでtrade-off比を得るのが便利である ⑤Kuhn-Tucker必要条件を満足するように探索しているので探索終了判定が確実である等の利点があるので、等式制約法は非劣解を求めるときの非線形最適化手法として活用できる。

参考文献 志水清孝: 多目的と競争の理論, 共出版

図-3 第1表

	f列	g_m 列	g_m 列	Δx_m 列	Δx_e 列
g行	f	$-g_m^T$	$-g_m^T$	0_m^T	0_e^T
x_m 行	$\frac{\partial f}{\partial x_m}$	$\frac{\partial g_m}{\partial x_m}$	$\frac{\partial g_m}{\partial x_m}$	I_m	0
x_e 行	$\frac{\partial f}{\partial x_e}$	$\frac{\partial g_m}{\partial x_e}$	$\frac{\partial g_m}{\partial x_e}$	0^T	I_e

第2表 $\downarrow \Delta x_m$ 掃出し

$f + \Delta f_m$	0_m^T	①	Δx_m^T	0_e^T
x_m	I_m	②	$(\frac{\partial g_m}{\partial x_m})^T$	0
$\frac{\partial f}{\partial x_e}$	0^T	③	④	I_e

第3表 $\downarrow \Delta x_e$ 掃出し

$f + \Delta f_m + \Delta f_e$	0_m^T	⑤	⑥	Δx_e^T
x_m	I_m	②	$(\frac{\partial g_m}{\partial x_m})^T$	0
$\frac{\partial f}{\partial x_e}$	0^T	③	④	I_e

$$① = -g_m^T - (-g_m^T)(-\frac{\partial g_m}{\partial x_m})^{-1}(-\frac{\partial g_m}{\partial x_m})$$

$$② = (-\frac{\partial g_m}{\partial x_m})^{-1} \frac{\partial g_m}{\partial x_m}$$

$$③ = -\frac{\partial g_m}{\partial x_e} - (-\frac{\partial g_m}{\partial x_e})(-\frac{\partial g_m}{\partial x_m})^{-1}(-\frac{\partial g_m}{\partial x_m})$$

$$④ = -(-\frac{\partial g_m}{\partial x_e})(-\frac{\partial g_m}{\partial x_m})^{-1}$$

$$⑤ = -g_m^T - (-g_m^T)(-\frac{\partial g_m}{\partial x_m})^{-1}(-\frac{\partial g_m}{\partial x_m}) +$$

$$\Delta x_e^T \left\{ \frac{\partial g_m}{\partial x_e} - (-\frac{\partial g_m}{\partial x_e})(-\frac{\partial g_m}{\partial x_e})^{-1}(-\frac{\partial g_m}{\partial x_m}) \right\}$$

$$⑥ = \Delta x_m^T + \Delta x_e^T (-\frac{\partial g_m}{\partial x_e})^{-1} (-\frac{\partial g_m}{\partial x_m})^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \min_x f(x) \\ \text{Subj. to } g(x) \leq 0 \end{array} \right\} \text{---(6)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \min_x \max_R \{w_R f_R(x)\} \\ \text{Subj. to } g(x) \leq 0 \end{array} \right\} \text{---(7)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \min_x w^T f(x) = \sum_{R=1}^p w_R f_R(x) \\ \text{Subj. to } g(x) \leq 0 \end{array} \right\} \text{---(8)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \min_x f_p(x) \\ \text{Subj. to } f_p(x) \leq \varepsilon \\ g(x) \leq 0 \end{array} \right\} \text{---(9)}$$

$$\lambda_{f_R} = -\frac{\Delta f_p}{\Delta f_R} \text{---(10)}$$