

I-120 スプライン帯板法を適用した円筒シエルの振動解析について

大同工業大学 正会員 ・水澤富作

1. はじめに シエルは、三次元構造であるが、Kirchhoff-Love の仮定を導入することにより、二次元構造として取り扱うことができる。ひずみ-変位の関係式への近似の導入により、種々のシエル方程式が提案されている。主なものを示すと、Donnell-Mushtari 理論、Koiter-Budiansky 理論、Sander 理論、Flügge 理論、Novozhilov 理論、Klasov 理論、Reissner-Naghdi-Berry 理論や Morley 理論があげられる。¹⁾ これらのシエルの基礎方程式は、一般に高次の偏微分方程式で与えられ、また面内変位と面外変位が連成するので、与えられる境界条件によっても大きな影響を受ける場合がある。シエルの振動解析には、種々の有限要素法や有限帯板法が用いられてきている。一方向に一樣な円筒シエルでは、有限帯板法が有効な手法であると思われる。²⁾

本論文では、先に³⁾提案したスプライン帯板法を用いて、Novozhilov のシエル理論に基づく円筒シエルの振動解析について述べる。本手法の収束性と精度について示すとともに、円筒シエルの振動性状に与える中心角や面内拘束の影響について解析を行っている。

2. スプライン帯板法による定式化 ここでは、Novozhilov のシエル理論と有限帯板法の離散化概念に基づき、Fig. 1 に示すような円筒シエルの式の定式化を行う。円筒帯板の両端での境界条件を単純支持されるものと仮定すると、変位関数は、次式のように示される。

$$\left. \begin{aligned} u(\theta, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^r a_{nm} N_{n,k}(\theta) \bar{Y}_m(x) \\ v(\theta, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^r b_{nm} N_{n,k}(\theta) \bar{Y}_m(x) \\ w(\theta, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^r c_{nm} N_{n,k}(\theta) \bar{Y}_m(x) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $i\theta = K + M_y - 1$, $\bar{Y}_m(x) = \cos m\pi x/L$, $Y_m(x) = \sin m\pi x/L$ であり、 $N_{n,k}(\theta)$ は、正規化された B-スプライン関数、 $K-1$ は、スプライン関数の次数である。 M_y は、帯板の要素数であり、 r は、級数項を示す。式(1)を書きかえると、次のように表わせる。

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r \begin{bmatrix} [\Phi] \bar{Y}_m(x) & 0 & 0 \\ 0 & [\Phi] \bar{Y}_m(x) & 0 \\ 0 & 0 & [\Phi] \bar{Y}_m(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A\}_m \\ \{B\}_m \\ \{C\}_m \end{Bmatrix} \quad (2), \quad \text{ここで、} [\Phi] = [N_{1,k}(\theta) \ N_{2,k}(\theta) \cdots N_{l_0,k}(\theta)],$$

$$\{A\}_m^T = \{a_{1,m} \ a_{2,m} \cdots a_{l_0,m}\} \text{ である。}$$

円筒シエルのひずみ-変位の関係式は、次式で定義される。

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ 0 & \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{2}{R} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ただし、 $\{\epsilon_p\} = \{\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_{12}\}$, $\{\epsilon_b\} = \{\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_{12}\}$ で示される。

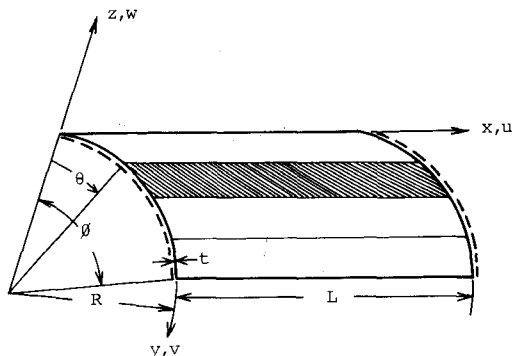


Fig. 1 Cylindrical shell

参考文献 (1) D. Bushnell, 'Computerized analysis of shells-governing equations', Compt. Struct., vol. 18, pp. 471-536 (1984). (2) D.J. Dawe, 'Static analysis....using a curved finite strip', IJNME, vol. 11, pp. 1347-1364 (1977). (3) 水沢, 桃田, 土木学会論文報告集, No. 341, 1984 (S. Peng-Cheng and W. Jian-Guo, IJNM for Partial Differential Equations (to appear)).

また、応力-ひずみの関係式は、 $\{\epsilon\} = [D]\{\sigma\}$ と与えられる。ここで、 $\{\epsilon\} = \{N_1, N_2, N_{12}, M_1, M_2, M_{12}\}$ で示される。また、

$$[D] = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} [d] & 0 \\ 0 & \frac{t^2}{12}[d] \end{bmatrix}, \quad [d] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

したがって、円筒シェルの変位関数 Π は、次式で与えられる。

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{\theta} \left\{ D^T \{e_p\}^T [d] \{e_p\} + D \{x_b\}^T [d] \{x_b\} \right\} R d\theta dx - \frac{\rho t}{2} \omega^2 \int_0^{\theta} \int_0^L \{u^2 + v^2 + w^2\} R d\theta dx \quad (5)$$

ここで、 $D' = Et^3/12(1-\nu^2)$ 、 $D = Et^3/12(1-\nu^2)$ 、 ρ は密度、 ω は円振動数である。

最小ポテンシャルエネルギーの原理より、式(5)を極値化することにより、次の剛性方程式が得られる。

$$\sum_{m=1}^r \sum_{s=1}^r \left(\begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{uv}] & [K_{uw}] \\ [K_{vu}] & [K_{vv}] & [K_{vw}] \\ [K_{wu}] & [K_{wv}] & [K_{ww}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A\} \\ \{B\} \\ \{C\} \end{Bmatrix} \right)_{ms} - n^{*2} \begin{bmatrix} [M_{uu}] & [M_{uv}] & [M_{uw}] \\ [M_{vu}] & [M_{vv}] & [M_{vw}] \\ [M_{wu}] & [M_{wv}] & [M_{ww}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A\} \\ \{B\} \\ \{C\} \end{Bmatrix} \bigg|_{ms} = 0 \quad (6)$$

ただし、直交性の性質より、 $[K]_{ij}$ 、 $[M]_{ij}$ は、 $i \neq j$ の場合には、すべて0になる。 $n^* = \omega R \sqrt{\rho/E}$ である。

3. 数値計算例および考察 スプライン帯板法を用いて、種々の境界条件をもつ円筒シェルの振動数の収束性に与える帯板要素数、 M_y とスプライン次数、 $k-1$ の影響について示し、また面内拘束条件の影響について検討を行っている。Table 1 では、周辺単純支持された円筒パネル ($\phi = 30^\circ$ 、 $L=1.0$ 、 $R=1.91$ 、 $t=0.0191$ 、 $\nu=0.3$) の5次までの振動数パラメータ $n^* = \omega R \sqrt{\rho/E}$ の収束性に与えるスプライン次数と帯板要素数の影響について示した。ここで、 M_y は4から12まで変化させ、 $k-1$ は、3と4を仮定している。また、精度比較のため、有限帯板法を用いて求められた Cheung らの結果とエネルギー法を用いて得られた Peng-Cheng らの値⁴⁾ も示されている。これより、帯板数を増大すると、高次の振動数まで安定した収束性が示され、他の数値解ともよく一致した結果が得られている。

Table 1. Convergence study of frequency parameter, n^* of simply supported cylindrical shell; $\phi=30^\circ$, $R=1.91$, $t=0.0191$, $L=1.0$ and $\nu=0.3$

Degrees of spline $k-1$	Number of strips M_y	Frequency parameters, n^*				
		n_{11}^*	n_{12}^*	n_{21}^*	n_{22}^*	n_{13}^*
3	4	0.2821	0.3028	0.5050	0.5243	0.6019
	6	0.2821	0.3010	0.5050	0.5233	0.5710
	10	0.2821	0.3010	0.5050	0.5233	0.5704
	12	0.2821	0.3010	0.5050	0.5233	0.5702
4	4	0.2821	0.3020	0.5050	0.5239	0.5828
	6	0.2821	0.3010	0.5050	0.5233	0.5716
	10	0.2821	0.3009	0.5050	0.5233	0.5701
	12	0.2821	0.3009	0.5050	0.5233	0.5701
FSM(flat strips)		0.285	0.305	0.512	0.530	0.573
FSM(curved strips)		0.277	0.277	0.466	0.493	0.542
Ritz method		0.2808	0.2999	0.5047	0.5227	0.5710

ただし、本手法による未知数の数は、 $3 \times (k + M_y - 1)$ で与えられる。

Table 2 では、周辺単純支持された円筒シェルの直線線での面内拘束による振動性状への影響について示した。ここで、単純支持モデルとして、4つの場合を仮定した。SS2 ($w=0$, $u=0$) が、従来から用いられている古典的境界条件を示す。これより、振動性状に与える面内拘束の影響は、低次モードにおいて顕著に示されている。

Table 2. The effect of inplane boundary conditions on frequency parameters, n^* and mode numbers of simply supported cylindrical shell; $M_y=12$, $k-1=3$, $R=1.91$, $t=0.0191$, $L=1.0$ and $\nu=0.3$

ϕ	Boundary conditions	Modes			
		1	2	3	4
30°	SS1 ($w=0$)	0.2063(1,1)	0.2914(1,2)	0.4674(2,1)	0.5012(2,2)
	SS2 ($w=0$, $u=0$)	0.2821(1,1)	0.3010(1,2)	0.5050(2,1)	0.5233(2,2)
	SS3 ($w=0$, $v=0$)	0.3579(1,1)	0.4497(1,2)	0.5529(2,1)	0.5805(2,2)
	SS4 ($w=0$, $u=0$, $v=0$)	0.3606(1,1)	0.4633(1,2)	0.5598(2,1)	0.5822(2,2)
60°	SS1 ($w=0$)	0.2223(1,1)	0.2364(1,2)	0.2998(1,3)	0.3775(1,4)
	SS2 ($w=0$, $u=0$)	0.2430(1,1)	0.2822(1,2)	0.3016(1,3)	0.4180(1,4)
	SS3 ($w=0$, $v=0$)	0.2839(1,1)	0.2932(1,2)	0.4066(1,3)	0.4140(1,4)
	SS4 ($w=0$, $u=0$, $v=0$)	0.2843(1,1)	0.2958(1,2)	0.4079(1,3)	0.4188(1,4)

4. あとがき 本文で得られた主な結果を示すと、次のようになる。

(1) スプライン次数と帯板要素の数を高めると、安定した収束性と精度が得られた。

(2) 円筒シェルの振動性状に与える面内拘束の影響は、低次モードにおいて、顕著にみられた。

(i, j): i は長手方向(元方向)のモード次数, j は円周方向(θ方向)のモード次数