

北見工業大学 正員 奥村 勇

1. まえがき 厚肉円筒殻の解析には、古くから、種々の理論及び解法が見受けられ、また、それらの理論の精密性及び適用性が、3次元弾性論によって検証されている。しかしながら、それらの理論のほとんどには、いわゆる殻近似仮定が含まれ、弾性論に基づいた厳密な解法ではない。

著者は、厚板の解析に有効と思われる一厚板理論をすでに提案したが、今回は、その厚板理論と同様な考え方、境界条件を満たすための同次解と荷重条件を満たすための特殊解とを重ね合わせた一解法により、有限厚肉円筒殻の軸対称応力解析を行ったので報告する。本報告で用いた一解法は、なんらの殻近似仮定も含まず、同次解及び特殊解が、共に、3次元弾性論に基づいた厳密な弾性解より構成され、有限厚肉円筒殻の端面の境界条件を満たすために、Saint-Venantの原理が用いられているだけの弾性論に基づいた精度の高い解法である。

2. 3次元弾性解 円柱座標 (r, θ, z) における3次元弾性問題の解は、次のように表わされる。

$$2G\psi_r = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \phi_0 + r \frac{\partial \phi}{\partial r} + z \frac{\partial \phi}{\partial z} - 4(1-\nu) \phi_1 \right\} + \frac{z}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \dots (1.a)$$

$$2G\psi_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \phi_0 + r \frac{\partial \phi}{\partial r} + z \frac{\partial \phi}{\partial z} - 4(1-\nu) \phi_1 \right\} - 2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \dots (1.b)$$

$$2G\psi_z = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \phi_0 + r \frac{\partial \phi}{\partial r} + z \frac{\partial \phi}{\partial z} - 4(1-\nu) \phi_1 \right\} \dots (1.c)$$

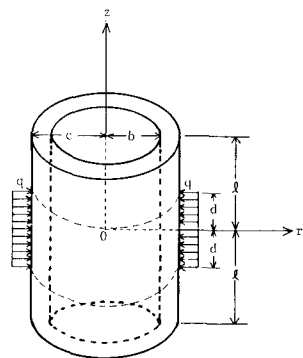


図-1 帯状外圧を受ける有限厚肉円筒殻

ここで、 $\nabla^2 \phi_0 = 0$, $\nabla^2 \phi_1 = 0$, $\nabla^2 \phi_2 = 0$, $\nabla^2 \phi_3 = 0 \dots (2.a \sim d)$

3. 同次解 図-1に示した有限厚肉円筒殻の境界条件を満たすための同次解は、曲面厚板としての理論的な解が得にくいため、ここでは、3次元弾性解より求めることにし、軸対称問題であることを考慮して、式(1.a)から式(1.c)に含まれる変位ポテンシャルを次のように置く。

$$\begin{aligned} \phi_{0,1} = & T_0^{(1)} \left(\frac{z^2}{2} r^2 - \frac{z^4}{6} - \frac{r^4}{16} \right) + T_0^{(2)} \left\{ z^2 r^2 \log \frac{r}{a} - \frac{z^4}{3} \left(\log \frac{r}{a} + 1 \right) + \right. \\ & \left. - \frac{1}{8} \left(r^4 \log \frac{r}{a} - \frac{r^4}{2} \right) \right\} + N_0^{(1)} \left(\frac{z^4}{2} r^2 - \frac{z^6}{15} - \frac{r^6}{8} z^2 r^4 + \frac{r^4}{48} \right) + \\ & + N_0^{(2)} \left\{ z^4 r^2 \log \frac{r}{a} - \frac{2z^6}{15} \left(\log \frac{r}{a} + 1 \right) - \frac{3z^2}{4} \left(r^4 \log \frac{r}{a} - \frac{r^4}{2} \right) + \frac{1}{24} \left(r^6 \log \frac{r}{a} - \frac{5}{6} r^6 \right) \right\} \dots (3.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_3 = & R_0^{(1)} \left(\frac{z^2}{2} r^2 - \frac{z^4}{6} - \frac{r^4}{16} \right) + R_0^{(2)} \left\{ z^2 r^2 \log \frac{r}{a} - \frac{z^4}{3} \left(\log \frac{r}{a} + 1 \right) - \frac{1}{8} \left(r^4 \log \frac{r}{a} - \frac{r^4}{2} \right) \right\} + O_0^{(1)} \left\{ -\frac{z^2}{2} r^2 + \right. \\ & \left. - \frac{z^6}{15} - \frac{r^6}{8} z^2 r^4 + \frac{r^4}{48} \right\} + O_0^{(2)} \left\{ z^4 r^2 \log \frac{r}{a} - \frac{2z^6}{15} \left(\log \frac{r}{a} + 1 \right) - \frac{3z^2}{4} \left(r^4 \log \frac{r}{a} - \frac{r^4}{2} \right) + \frac{1}{24} \left(r^6 \log \frac{r}{a} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{5}{6} r^6 \right) \right\} \dots (3.b) \end{aligned}$$

ここで、 $T_0^{(1)}$ から $O_0^{(2)}$ は、境界条件によって定められるべき未定定数である。

4. 特殊解 荷重条件を満たすための特殊解として、式(1.a)から式(1.c)を用い、変位ポテンシャルを次のように表わす。

$$\phi_{0,1} = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \beta_n z \left\{ D_n^{(1)} I_0(\beta_n r) + D_n^{(2)} K_0(\beta_n r) \right\}, \quad \phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \beta_n z \left\{ F_n^{(1)} I_0(\beta_n r) + F_n^{(2)} K_0(\beta_n r) \right\} \dots (4.a, b)$$

ここで、 $D_n^{(1)}$ から $F_n^{(2)}$ は、荷重条件によって定められるべき未定定数であり、 $\beta_n = n\pi/l$ ($n=1, 2, \dots$) である。

5. 境界条件 図-1に示した帯状外圧を受ける有限厚肉円筒殻の境界条件は、次のとおりである。

$$r=a \text{ において, } \sigma_{rr} = 0, \sigma_{rz} = 0 \dots (5.a), \quad r=b \text{ において, } \sigma_{rr} = -p(z), \sigma_{rz} = 0 \dots (5.b)$$

$$z = \pm l \text{ において, } T_z = 0, Q_z = 0, M_z = 0 \dots \dots (5. c)$$

ここで, T_z , Q_z 及び M_z は, それぞれ, 軸力, せん断力及び曲げモーメントであり, また, $p(z)$ は, $-d < z < d$ において q , $d < |z|$ において 0 と定義された荷重の関数である。

6. 解析方法 同次解及び特殊解の変位がテンソルをそれぞれ式 (1. a) 及び式 (1. c) に代入し, 変位成分及び応力成分を求め, 更に, 合応力及び合モーメントを求めて, 式 (5. a) から式 (5. c) の境界条件を課して数式を組み立てるが, せん断応力 σ_{rz} に関する境界条件は, 厳密に満たす様にするとは好都合である。

7. 数値計算例 図-2から図-4には, $l/b = 3.0$, $d/l = 0.3$ 及びポアソン比 ν を 0.25 としたときの種々の $\kappa = c/b$ に対する垂直応力 σ_{zz} , σ_{rr} 及びせん断応力 σ_{rz} の肉厚方向の分布を示した。これらの図において用いられた記号 r 及び t は, それぞれ, $r = r - (b+c)/2$ 及び $t = c-b$ である。また, 図-5には, 極めて短い且つ厚い有限厚肉円筒殻に関する σ_{zz} の3次元解析による値との比較を示した。

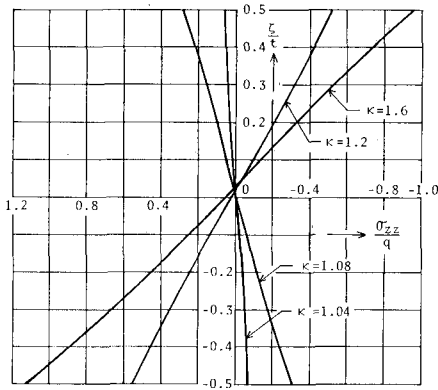


図-2 σ_{zz} の分布

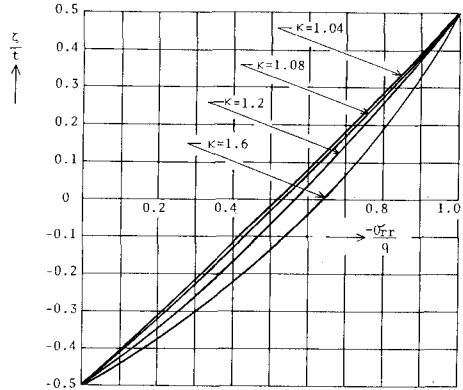


図-3 σ_{rr} の分布

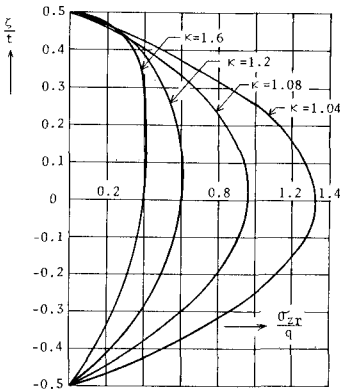
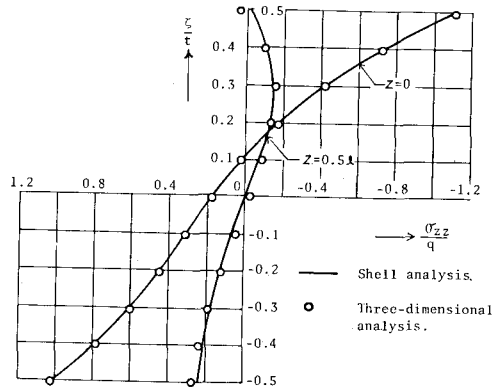


図-4 σ_{zr} の分布



($\kappa = \frac{c}{b} = 2.0, \frac{a}{b} = 1.5, \frac{d}{l} = 0.3, \nu = 0.25$)

図-5 σ_{zz} の3次元解析との比較

8. あとがき 境界条件を Saint-Venant の原理に基づいて課しているため, 有限厚肉円筒殻の端面付近における値は, 不正確になるが, 端面を離れた内部では, 変位成分及び応力成分共に, 3次元解析による値と数値 2~3桁一致した極めて精度の高い解法になっている。なんらの殻近似仮定を含まない厳密な弾性論に基づいた解法であることに注目すれば, 本報告で提案した一解析方法は, 有限厚肉円筒殻の有用な一解法と考えられる。