

山梨大学 工学部 正員 平島 健一
大分工業高等専門学校 正員 呼野 喜三郎

1. 緒言

本研究は、変位成分をシェル厚方向の座標 z に關し無限項のべき級数に展開して高次シェル理論を定式化し、それらの結果を有限項打ち切りにより特殊化した3種類の近似理論式を提案すると共に、提案手法により得られた結果を *Mirskey* 理論⁽¹⁾、*Bhimaraddi* 理論⁽²⁾ および厳密解(三次元弾性論)の結果と比較することにより提案手法の精度特性を検討したものである。

2. 円筒シェルの支配方程式の導出

変位および物体力の各成分がシェル厚方向の座標 z に關し無限項のべき級数展開が可能であるとする。すなわち、次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} (u_x, u_\theta, w) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n (u_x^{(n)}, u_\theta^{(n)}, w^{(n)}), \\ (f_x, f_\theta, f_z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n (f_x^{(n)}, f_\theta^{(n)}, f_z^{(n)}). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 $u_x^{(n)}$ 、 $u_\theta^{(n)}$ および $w^{(n)}$ はそれぞれ n 次の変位係数であって、座標 (x, θ) および時間 t に依存するものである。 $f_x^{(n)}$ 、 $\dots$ についても同様である。

(1) 式を応力-変位関係式に代入して、応力-変位係数の関係式を求める。このとき因子 $1/(R+z)$ を次のようにべき級数に展開した関係式：

$$\frac{1}{R+z} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1+z/R} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{R}\right)^n, \quad -1 < \frac{z}{R} < 1. \quad (2)$$

を用いる。次に応力成分をシェル厚方向に沿って集積しシェル厚中央面で代表させる、いわゆる x, θ を独立変数とする二次元化理論として定式化する。以下に示すような2種類の“一般化断面力”を定義する。

$$\left. \begin{aligned} (\hat{\sigma}^{(k)}, \hat{\tau}^{(k)}) &= \int_{-b}^b z^k (\sigma, \tau) dz, \\ (\hat{\sigma}^{(k)}, \hat{\tau}^{(k)}) &= \int_{-b}^b \left(1 + \frac{z}{R}\right) z^k (\sigma, \tau) dz. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

次に、円柱座標系に関する運動方程式に z^k を掛けシェル厚にわたって積分を実行し、運動方程式を二次元化する。二次元化した運動方程式を(3)式の一般化断面力を用いて表示すると、次式のようになる。(拘体力 $f_z = 0$ およびシェル上下面のせん断荷重 $\tau_{xz}^{\pm} = \tau_{\theta z}^{\pm} = 0$ の場合を示す)

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_{xx}^{(k)} + \frac{1}{R} \hat{\tau}_{x\theta}^{(k)} - k \hat{\tau}_{xz}^{(k-1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} J_n^k \rho \ddot{u}_x^{(n)}, \\ \hat{\tau}_{x\theta}^{(k)} + \frac{1}{R} \hat{\sigma}_{\theta\theta}^{(k)} + \frac{1}{R} \hat{\tau}_{\theta z}^{(k)} - k \hat{\tau}_{\theta z}^{(k-1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} J_n^k \rho \ddot{u}_\theta^{(n)}, \\ \hat{\tau}_{xz}^{(k)} + \frac{1}{R} \hat{\tau}_{\theta z}^{(k)} - \frac{1}{R} \hat{\sigma}_{\theta\theta}^{(k)} - k \hat{\sigma}_{zz}^{(k-1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} J_n^k \rho \ddot{w}^{(n)}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

($k = 0, 1, 2, \dots$)

ここに、 $J_n^k = I^{k+m} + \frac{I^{k+m+1}}{R}$, $I^k = \frac{b^{k+1}}{k+1} \{1 - (-1)^{k+1}\}$

3. 頂数の打ち切りと各種の円筒シェル理論

(A) 3-order 型の理論

次式のように、面内変位(x および θ 方向変位)については z に關し3次、面外(シェル厚方向)変位については z の0次の項まで採用する。

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x^{(0)} + z u_x^{(1)} + z^2 u_x^{(2)} + z^3 u_x^{(3)}, \\ u_\theta &= u_\theta^{(0)} + z u_\theta^{(1)} + z^2 u_\theta^{(2)} + z^3 u_\theta^{(3)}, \\ w &= w^{(0)} = w_0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(B) Levinson 型の理論

(5) 式をシェル上下表面($z = \pm b$)での与えられたせん断荷重($\tau_{xz}^{\pm}$, $\tau_{\theta z}^{\pm}$)の境界条件：

$$\tau_{xz}|_{z=\pm b} \equiv \frac{1}{G} \tau_{xz}^{\pm}, \quad \tau_{\theta z}|_{z=\pm b} \equiv \frac{1}{G} \tau_{\theta z}^{\pm} \quad (6)$$

と組み合わせて整理すると、 $u_x^{(2)}$ 、 $u_x^{(3)}$ 、 $u_\theta^{(2)}$ 、 $u_\theta^{(3)}$ が残りの変位係数と与えられた $\tau_{xz}^{\pm}$ 、 $\tau_{\theta z}^{\pm}$ を用いて表わされ、独立な変位係数は $u_x^{(0)}$ 、 $u_x^{(1)}$ 、 $u_\theta^{(0)}$ 、 $u_\theta^{(1)}$ および w_0 の5つとなる。

(C) Levinson-Baluch-Voyiadjis 型の理論 (L. B. V. 型の理論)

シェル厚方向の直ひずみ ϵ_z の影響を定式化の最初の段階で考慮し、さらに Levinson 型のものと同融合させたものである。この理論では次式の面内合モーメント M および合力 N が基礎式中に現われることになる。

$$M = \hat{\sigma}_x^{(1)} + \hat{\sigma}_\theta^{(1)}, \quad N = \hat{\sigma}_x^{(0)} + \hat{\sigma}_\theta^{(0)}. \quad (7)$$

ここに、 $\hat{\sigma}_x^{(1)}$ 、 $\hat{\sigma}_x^{(0)}$ ； $\hat{\sigma}_\theta^{(1)}$ 、 $\hat{\sigma}_\theta^{(0)}$ は通常の軸力、曲げモーメントである。

4. 数値計算例

提案手法による結果の精度を確認するため、両端単純支持の円筒シェルの最低次の固有振動数について検

討した。固有振動数は幾何学的寸法，材料定数，モード数などに関係するが，数値計算においては，ポアソン比 $\nu = 0.3$ ；軸方向波長 $\lambda = 0.5\pi, \pi, 2\pi, 5\pi, 8\pi$ ；周方向モード数 $n = 1, 2, 3, 4$ ；厚さ-半径比 $h/a = 0.06, 0.10, 0.12$ ，を用いた。ここに， $\lambda = m\pi a/l$ (m : 軸方向モード数) である。また，変位は次式を仮定した。

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u_x^{(0)} \\ \vdots \\ u_x^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \cos \frac{\lambda x}{a} \cos n\theta e^{i\Omega t}, \\ \begin{pmatrix} u_\theta^{(0)} \\ \vdots \\ u_\theta^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} \sin \frac{\lambda x}{a} \sin n\theta e^{i\Omega t}, \end{cases} \quad (8)$$

$$w = C \sin \frac{\lambda x}{a} \cos n\theta e^{i\Omega t}.$$

ここに， $A_0, A_1, \dots, C$ は振幅である。

図-1 は，厳密解による固有振動数 Ω_E を基準にとり，Mirsky 理論 (M理論)，Bhimaraddy 理論 (B理論) および提案手法 (3-order 型，Levinson 型，L.B.V. 型) による振動数を比の形で示したものである ($n=2, 3$ は紙面の都合上省略した)。種々のパラメータについて各理論を比較した結果次のことが判明した。

(1) 各理論による固有振動数は， λ の低い値 ($\lambda < \pi$) に対しては過大に評価し， λ の高い値 ($\lambda > \pi$) に対しては過小に評価する。

(2) 厚さが比較的薄いシェル ($h/a = 0.06$) の場合は，L.B.V. 型理論および B理論が他の理論と比較してよい精度の値を与えている。

(3) $\lambda < \pi$ の場合，3-order 型理論を除けば，各理論間に大きな差異は認められず，また最大誤差は $0.14 \sim 0.32\%$ と比較的小さい。

(4) $\lambda > \pi$ の場合， λ が大きくなるにつれて各理論の固有振動数と厳密解の差が増大する。この傾向は n および h/a が大きくなるにつれて増大する。例えば， $n=4$ ， $h/a=0.12$ ， $\lambda=8\pi$ の場合，最大誤差は 3-order 型理論：1.22%，Levinson 型理論：1.84%，L.B.V. 型理論：2.32%，M理論：2.27%，B理論：1.96% となり，3-order 型理論が比較的精度がよい。

参考文献 1) Mirsky, I. & G. Hermann, "Nonaxially Symmetric Motions of Cylindrical Shells", J. Acoust. Soc. Am. 29 (1957) 2) Bhimaraddy, A., "A Higher Order Theory for Free Vibration Analysis of Circular Cylindrical Shells", Int. J. Solids Structures, 20 (1984)

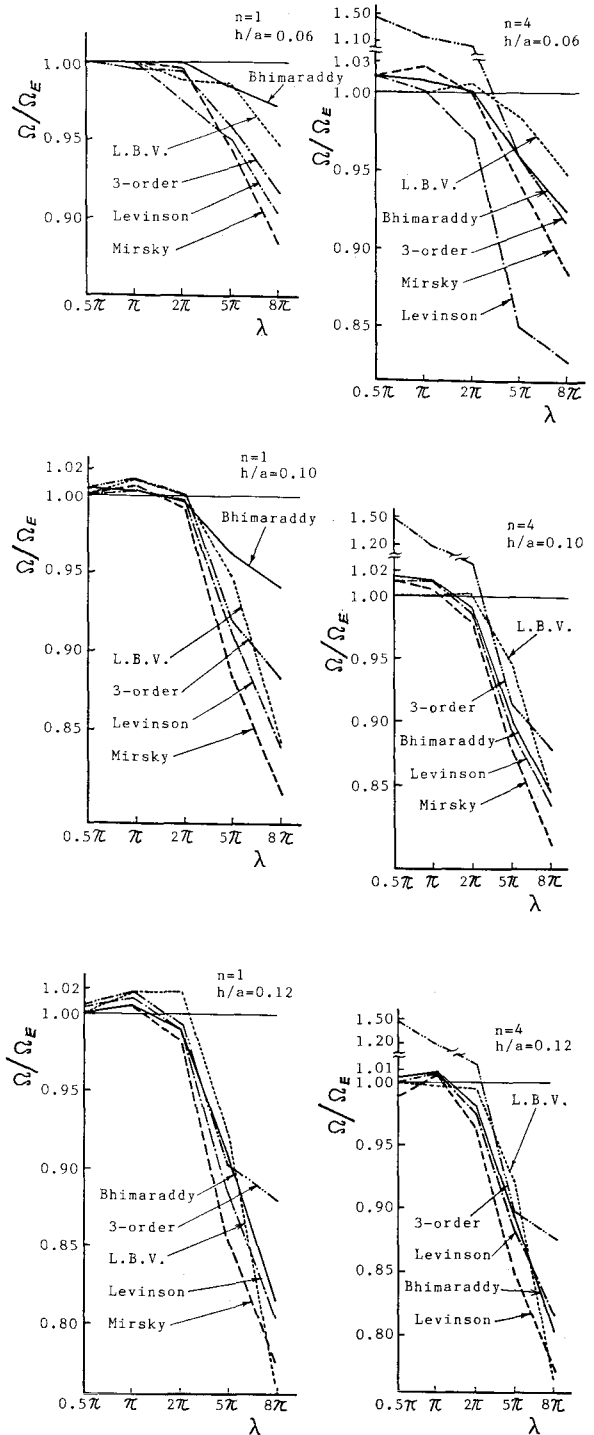


図-1 固有振動数比 (厳密解を基準)