

I-115 薄肉閉断面曲線ばりの断面変形挙動の定式化について

九州大学工学部 正会員 高海克彦

九州大学工学部 正会員 彦坂 照

九州大学工学部 学生員 Mian Amar Mahmood

1. まえがき

4枚の薄板要素からなる箱桁の断面変形に関しては、一次元棒理論の修正の立場から、これまで種々の解析法が提案されているが、任意荷重を受ける任意多角形薄肉閉断面曲線ばりの断面変形挙動については、一次元のはり理論として定式化されたものは見あたらない。本研究は、断面変形と曲げおよびねじりの連成を考慮した閉断面曲線ばりの断面変形理論¹⁾を拡張し、薄肉開・閉断面曲線ばりの断面変形挙動を統一的に定式化したものである。

2. 薄肉閉断面ばりの断面変形

図-1のように、N枚の薄板要素からなるN角形閉断面曲線ばり上の点を表す座標系として、はりの曲率中心線上の点Oを原点とする円柱座標系(ρ , α , z)を定める。さらに、断面内に中立点Oを原点として曲率面に平行および垂直な直交座標系(x , y)および薄板中心に沿う流動直交座標系(n , s)を設け、板厚 t は s の関数とする。断面変形を、板要素 i の板要素 $i+1$ に対する反時計回りの相対回転角 θ_i ($i=1, 2, \dots, N$)で定義するとき、断面の閉合条件より、 θ_i は次の式を満たさねばならない²⁾。

$$\sum_{i=1}^N \theta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{N-1} (x_i - x_N) \theta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{N-1} (y_i - y_N) \theta_i = 0 \quad (1)$$

ここに、(x_i , y_i)は節点 i の x , y 座標。

よって、N枚の薄板からなる閉断面ばりの断面変形の自由度は $N-3$ である。

3. 断面変形の変位場

断面変形に伴う断面内の任意点(x , y)の x , y , α 方向付加変位 u , v , w は、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s - (y - y_s) \varphi - \sum_{i=1}^{N-1} (y - y_i) \mu_i \theta_i \\ v &= v_s + (x - x_s) \varphi + \sum_{i=1}^{N-1} (x - x_i) \mu_i \theta_i \\ w &= w_s - (x - x_s) \left(\frac{u'_s}{R_s} - \frac{w_s}{R_s} \right) - (y - y_s) \frac{v'_s}{R_s} + \omega \left(\frac{\varphi'}{R_s} - \frac{v_s}{R_s} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\rho}{R_s} (\psi_i - \psi_{is}) \frac{\theta'_i}{R_s} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\text{ただし、} \mu_i = \begin{cases} 1 & (s \leq s_i) \\ 0 & (s > s_i) \end{cases}$$

ここに、 u_s , v_s , w_s , φ はせん断中心 $S(x_s, y_s)$ の x , y , α 方向剛体付加変位および付加回転角、 R_s はせん断中心の曲率半径、 s_i は節点 i の s 座標。 ω はせん断中心を極とする正規化されたねじりの単位そり関数、 ψ_i は断面変形のそり関数、 ψ_{is} はせん断中心における ψ_i の値。

4. 断面変形のつりあい方程式

任意の外力を受けて断面変形を生じたはりの内力は、断面剛の仮定に基づくはり理論による応力(初期応

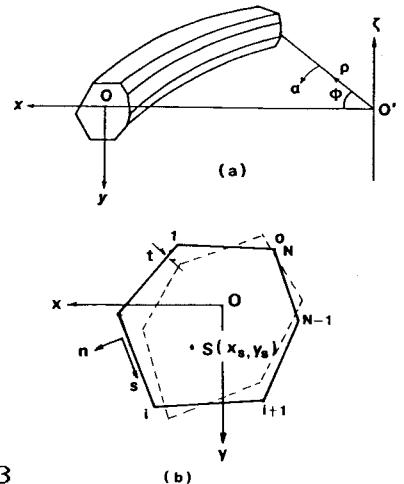


図-1 薄肉閉断面曲線ばり

力)と、断面変形に伴う付加応力の和である。断面変形に伴う付加応力としては、軸方向垂直応力、それにつりあうせん断応力、St.Venantのねじりによるせん断応力、および薄板要素のはり軸直角方向曲げ応力を考える²⁾。式(1)の第2、第3を付帯条件としてLagrangeの未定乗数 λ_1 、 λ_2 を導入し、仮想仕事式の原理を用いれば、 θ_i ($i = 1, 2, \dots, N-1$)と λ_1 、 λ_2 に関する次の方程式が得られる。

$$E \sum_{j=1}^{N-1} \left[O_{ij} \frac{\theta_j''}{R_s} + (L_{ij} + L_{ji} - \frac{E H_{i\omega} H_{j\omega}}{G J}) \frac{\theta_j^{(6)}}{R_s^6} + I_{ij} \frac{\theta_j'''}{R_s^3} - \frac{1}{R_s} (J_{ij} + J_{ji} + \frac{E G_{i\omega} G_{j\omega}}{G J R_s}) \frac{\theta_j''}{R_s^2} + (\frac{K_{ij}}{R_s} + \frac{f_{ij}}{E}) \theta_j \right] - \frac{T_i^{(0)'}}{R_s} - \frac{M_{xi}^{(0)'}}{R_s} - 2 \Omega_i \frac{q_{st}^{(0)'}}{R_s} - m_{\alpha i} + \lambda_1 (x_i - x_N) + \lambda_2 (y_i - y_N) = 0 \quad (3)$$

ここに、 O_{ij} 、 L_{ij} 、 I_{ij} 、 J_{ij} 、 K_{ij} 、 f_{ij} 、 $H_{i\omega}$ 、 $G_{i\omega}$ 、 Ω_i は断面形によって決まる定数であり、 E はヤング係数、 G はせん断弾性係数、 J は純ねじり定数、 $M_{xi}^{(0)}$ 、 $T_i^{(0)}$ は各々はり軸方向初期応力とそれにつりあうせん断流に関して定義される断面力、 $q_{st}^{(0)}$ はSt.Venantのねじりによる初期せん断流、 $m_{\alpha i}$ は単位長さあたりに定義される外力、 $(\quad)$ は α に関する微係数。

5. 逆台形曲線箱桁への適用

4枚の薄板からなる箱桁は、定義から自由度1の断面変形問題となる。図-2の逆台形箱桁に対しては、例えば節点2の θ_2 で断面変形を代表させれば、他の断面変形 θ_1 、 θ_3 、 θ_4 は次のように与えられる。

$$\theta_1 = -\theta_2, \quad \theta_3 = -\frac{B_L}{B_U} \theta_2, \quad \theta_4 = \frac{B_L}{B_U} \theta_2 \quad (4)$$

式(3)において、断面変形に伴うせん断ひずみを無視する場合、 θ_2 を規準にして付帯条件からLagrangeの未定乗数および θ_1 、 θ_3 を消去すれば、次の支配方程式を得る。

$$E I_{22} \frac{\theta_2'''}{R_s^3} + f \theta_2 = - (\frac{H_{2\omega}}{I_{\omega}} - \frac{B_L}{B_U}) q_T - (\frac{H_{2\omega}}{I_{\omega}} - \frac{\Omega_2}{\Omega}) \frac{G J}{E I_{\omega}} M_{\omega} - \frac{H_{2\omega} M_x}{I_{\omega} R_s} \quad (5)$$

ここに、 q_T は外荷重トルク、 M_x 、 M はそれぞれ箱桁の初期応力による曲げモーメントおよび曲げねじりモーメント、 I_{ω} は曲げねじり定数、 Ω は箱桁閉区間の面積、 f は薄板の横方向曲げ剛性に関する定数。

式(5)は基本的にはBEFアナロジーであるが、箱桁ずり荷重には、初期応力による曲げねじりモーメントも含まれている。

断面変形に伴うはり軸方向垂直応力 σ_D は、次のように表される。

$$\sigma_D = E \Psi_2 \frac{\theta_2''}{R_s^2} \quad (6)$$

ここに、 Ψ_2 は s の関数。

具体的数値計算および他の解析法との比較については、講演当日発表する。

<参考文献>

- 1) 彦坂・高海：薄肉閉断面曲がりばりの断面変形挙動の定式化、土木学会論文集、第356号／1-3、昭和60年4月。
- 2) 高海・彦坂：任意多角形薄肉閉断面直線ばりの断面変形理論について、第40回年次講演会概要集、昭和60年9月。

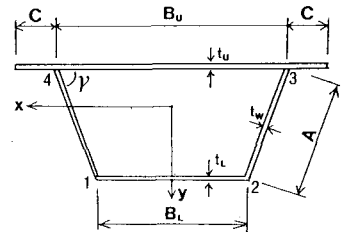


図-2 逆台形箱桁断面