

I-66

板構造の有限変位応答解析

愛媛大学工学部 正会員 大賀 水田生
徳山工専 正会員 重松 恒美
愛媛大学大学院 学生員 村田 基治

1. まえがき

著者らは、有限要素法と伝達マトリックス法を結合させる方法(FE-TM法)をNewmarkの β 法と組み合わせることにより、面外および面内変動荷重を受ける薄板の動的応答解析を行ない、解の精度を落すことなく、有限要素法で必要なマトリックスサイズに比較してかなり小さなマトリックスの演算により解を求めることができることを報告している¹⁾。そこで本研究では、面外および面内変動荷重を受ける薄板の有限変形応答問題にFE-TM法を適用し、得られた結果を有限要素法による結果、および実験により得られた結果と比較することにより本法の妥当性の検討を行なった。なお、板に生じる応力の計算に際しては、幾何学的非線形性を考慮するため、Murray-Wilson²⁾の座標移動法を用いた。

2. FE-TM法による動的応答解析

本法では、図-1(a)に示すように板を m 個のストリップに分割し、さらにそれぞれのストリップを有限要素に再分割する(図-1(b))。それぞれのストリップに対する面内振動および面外振動を考慮した増分形運動方程式は、時刻 $(t + \Delta t)$ および時刻 (t) での運動方程式より次式のように得られる。

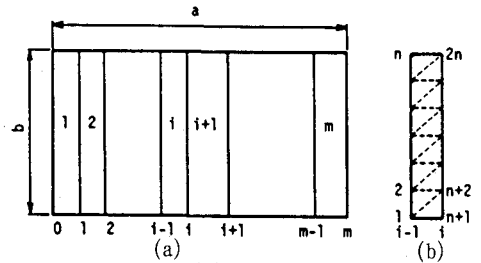


図-1 要素分割

$$M \Delta \ddot{x} + C \Delta \dot{x} + [K + \sigma(t + \Delta t) K_0] \Delta x = \Delta F - \Delta \sigma K_0 x(t) \quad (1)$$

ここに、 M , C , K , K_0 は、それぞれ質量、減衰、剛性および幾何剛性マトリックス、 $\Delta \ddot{x}$, $\Delta \dot{x}$, Δx は、変位、速度、加速度の増分ベクトル、 ΔF , $\Delta \sigma$ は外力および応力の増分ベクトルである。本研究では、数値計算の効率化を計るため、式(1)の左辺に含まれる幾何学的非線形項 $\sigma(t + \Delta t) K_0$ を右辺に移行し、次のような近似を行なった。

$$M \Delta \ddot{x} + C \Delta \dot{x} + K \Delta x = \Delta F - \Delta \sigma K_0 x(t) - \sigma(t) K_0 \Delta \bar{x} \quad (2)$$

ここに、 $\Delta \bar{x}$ は一段階前での変位の増分ベクトルである。ここで、Newmarkの β 法により微小時間間隔 Δt 秒後の増分速度、増分加速度の近似式を導入し整理すると、運動方程式(2)は次のようになる。

$$A \Delta x + G(t) = \Delta F \quad (3)$$

ただし
$$A = \frac{M}{\beta (\Delta t)^2} + \frac{C}{2\beta \Delta t} + K$$

$$G(t) = -\frac{M}{\beta \Delta t} \left[\dot{x}(t) + \frac{\Delta t}{2} \ddot{x}(t) \right] - \frac{C}{2\beta} \left[\dot{x}(t) + \Delta t \left(\frac{1}{2} - 2\beta \right) \ddot{x}(t) \right] + \Delta \sigma K_0 x(t) - \sigma(t) K_0 \Delta \bar{x}$$

式(3)を、左側節線上および右側節線上の成分に区別して表示すると次式のようにになる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta F^L \\ \Delta F^R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{LL} & A_{LR} \\ A_{RL} & A_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x^L \\ \Delta x^R \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} G^L(t) \\ G^R(t) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

式(4)を変換することにより、ストリップの左側接線上の節点変位、節点力と右側接線上のそれらとを結びつける伝達マトリックスが次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta x^R \\ \Delta F^R \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{LR}^{-1} A_{LL} & A_{LR}^{-1} & -A_{LR}^{-1} G^L \\ A_{RR} A_{LR}^{-1} A_{LL} - A_{RL} & -A_{RR} A_{LR} & A_{RR} A_{LR}^{-1} G^L - G^R \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x^L \\ \Delta F^L \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\Delta Z^R = T \Delta Z^L \quad (6)$$

上式を用い、伝達マトリックス法の手段に従い、時刻 $(t + \Delta t)$ における節線上の未知状態量を決定していく。

3. 数値計算結果および考案

本解析法の妥当性を検討するため、一辺100cmの四辺単純支持板が、板中央に面外変動荷重 ($P=P_0 \sin \theta t$, $P_0=100\text{kg}$, $\theta=222.1\text{ rad}$) を受ける場合について本法およびFEMにより応答解析を行なった（図-2）。なお、FEMによる応答波形は運動方程式(1)に基づくものである。両解析法による応答波形は位相に少し差があるものの、いずれも良く一致している。図-4、図-5に面内変動荷重を受ける四辺単純支持板（図-3）の応答波形の比較を示している。図-4は安定領域 ($f=\theta/2\pi=36\text{Hz}$)、図-5は不安定領域付近 ($f=40\text{Hz}$) での、板中央点での応答波形である。安定領域 ($f=36\text{Hz}$) では、本法による応答波形は微小変形解析法による波形に比較して振幅が小さくなっており、実験により得られた応答波形と良く一致している。また、不安定領域付近 ($f=40\text{Hz}$) では、微小変形解析法による応答波形は発散振動を示すのに対し、本法による結果では、変位がある程度大きくなると、幾何学的非線形性の影響により、振幅が抑えられており、実験により得られた応答波形の特性と一致している。

参考文献

- 1) 大賀 他；第60回年次講演会概要集. 1985, 9.
- 2) Murray, D.W. and Wilson, E.L., "Finite-Element Large Deflection Analysis of Plates", ASCE, Vol. 95, No. EM1, 1969.

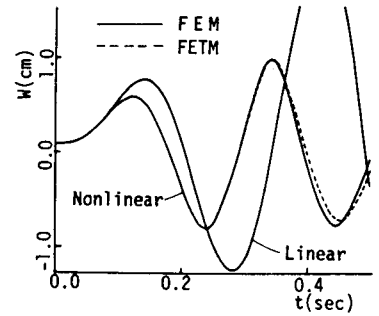


図-2 応答波形

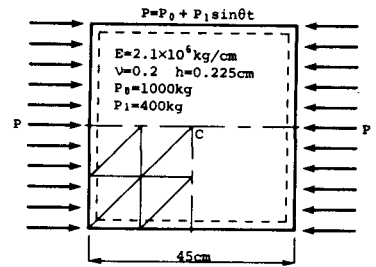


図-3 解析モデル

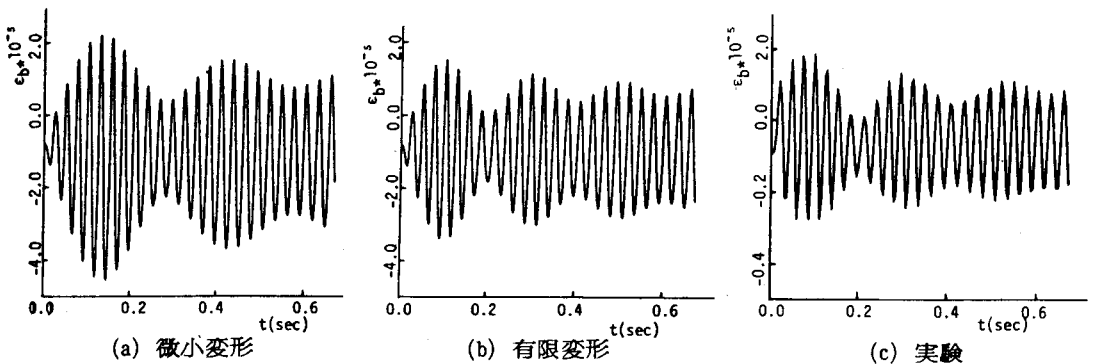


図-4 応答波形 (36 Hz)

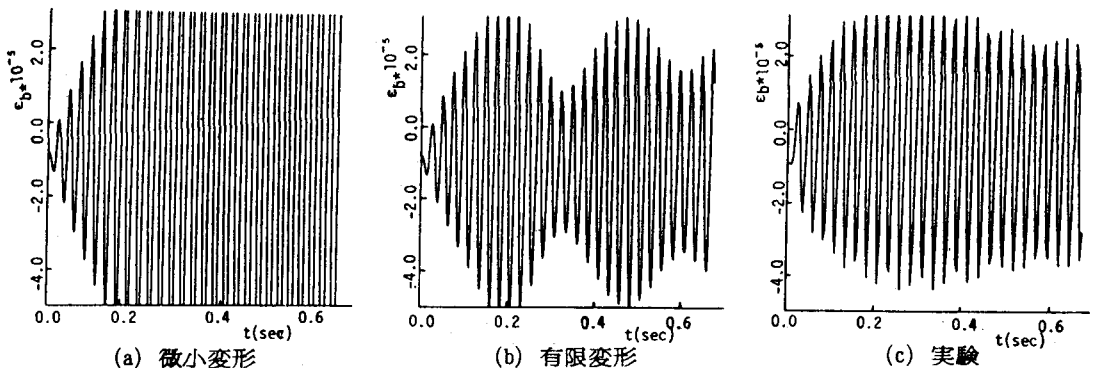


図-5 応答波形 (40 Hz)