

I-65 空間曲線を有する薄肉 I 形はりの有限変位場

東京電機大学 井浦雅司

1. はじめに

本報告は、I 形断面を有する薄肉棒部材の有限変位場を誘導することを目的としている。薄肉棒部材に関する研究はこれまで多くなされており、微小変位理論においてはひずみ場の仮定より変位場を求める手法が主流をなしている。有限変位理論においてもひずみ場の仮定から出発する場合が多いが、既往の研究の多くは軸線方向の変位成分の2次項を無視している。倉方は¹⁾ひずみ場の仮定から出発しているものの、既往の研究とは異なり、軸線方向の変位成分の高次項を無視することなく平面曲線を有する薄肉折板開断面部材の有限変位場の誘導を試みている。しかしながら、倉方は、変形後の棒軸の基底ベクトルを独立な4つのパラメーターで表わす段階で、変位成分の大きさに制限をつけている。以上のように、ひずみや変位成分の大きさに制限をつけることなく薄肉棒部材の有限変位理論を展開した研究は少ない。

本報告では、倉方の手法を用いて、I 形断面を有する薄肉空間曲線はりの有限変位場を求めている。まず薄肉棒部材の解析において広く用いられている仮定より、変形後の中央面における基底ベクトルを、変形後の棒軸の基底ベクトルで表わす。変形後の棒軸を4つのパラメーターで表現するには、著者らが誘導した文献(2)の結果が利用でき、その結果、任意点における変位ベクトルは独立な4つのパラメーターにより表すことができる。

2. 変形前の基底ベクトル

ここで用いる座標系およびそれに付随する基底ベクトルをFig. 1に示す。

Frenet-Serret の公式より、棒軸の基底ベクトル

$\mathbf{e}_m$ に関して以下の式を得る。

$$\mathbf{e}_{m+1} = k \times \mathbf{e}_m, \quad k = k_m \mathbf{e}_m, \quad (), \quad \dot{} = d()/dz \quad (1)$$

ここに、 k_1 は初期ねじれ率、 k_2 、 k_3 は初期曲率を示す。ここで、物体内の任意点における位置ベクトルは以下の式で与えられるものと仮定する。

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^* + z^3 \mathbf{a}_3^* \quad (2)$$

ここに、 $()^*$ は部材中央面における量を示す。式(2)より、任意点における変形前の基底ベクトルは次式のように求まる。

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \sqrt{g} \mathbf{e}_1 - k_1 (Y^{3*} + Z^3 Y^{2*}_{,2}) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + k_1 (Y^{2*} - Z^3 Y^{3*}_{,2}) \mathbf{e}_3; \\ \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_2^*; \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3^*; \quad \sqrt{g} = 1 + k_2 (Y^{3*} \\ &\quad + Z^3 Y^{2*}_{,2}) - k_3 (Y^{2*} - Z^3 Y^{3*}_{,2}) \dots (3) \end{aligned}$$

3. 変形後の基底ベクトル

変形後の量を

$()$ と表わすと、薄肉開断面部材の解析において通常用いられている仮定は

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}_2^* \cdot \bar{\mathbf{a}}_2^* - \mathbf{a}_2^* \cdot \mathbf{a}_2^* &= 0 \\ \bar{\mathbf{a}}_3^* \cdot \bar{\mathbf{a}}_3^* - \mathbf{a}_3^* \cdot \mathbf{a}_3^* &= 0 \\ \bar{\mathbf{a}}_2^* \cdot \bar{\mathbf{a}}_3^* - \mathbf{a}_2^* \cdot \mathbf{a}_3^* &= 0 \end{aligned} \right\} : (\text{断面剛の仮定})$$

$$\bar{\mathbf{a}}_1^* \cdot \bar{\mathbf{a}}_2^* - \mathbf{a}_1^* \cdot \mathbf{a}_2^* = 0 \quad : (\text{B-E の仮定})$$

$$\bar{\mathbf{a}}_1^* \cdot \bar{\mathbf{a}}_3^* - \mathbf{a}_1^* \cdot \mathbf{a}_3^* = 0 \quad : (\text{K-L の仮定}) \quad (4)$$

と表される。さらに、断面剛の仮定とI形断面である

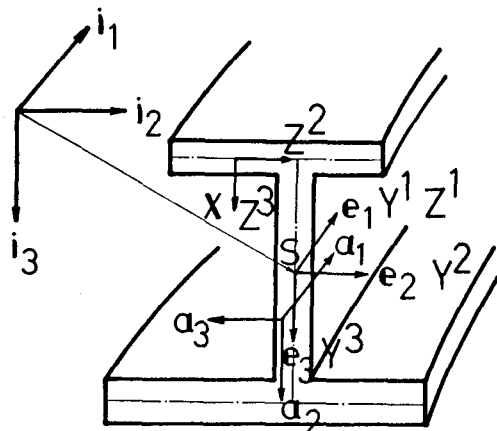


Fig. 1

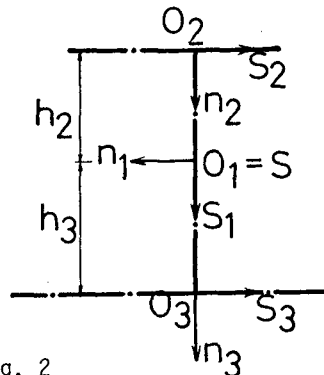


Fig. 2

ということから次式を得る。

$$\bar{a}_2^* \cdot \bar{a}_3^* - \bar{a}_2^* \cdot \bar{a}_3^* = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、Fig. 2 に示す局所座標系 s_i , n_i を導入する。まず、ウェブの変形後の基底ベクトルを求める。

式(3)を式(4), (5)に代入することにより次式を得る。

$$\begin{aligned} w_{\bar{a}_2}^* \cdot w_{\bar{a}_2}^* &= 1, & w_{\bar{a}_3}^* \cdot w_{\bar{a}_3}^* &= 1, & w_{\bar{a}_2}^* \cdot w_{\bar{a}_3}^* &= 0, & w_{\bar{a}_1}^* \cdot w_{\bar{a}_2}^* &= 0, \\ w_{\bar{a}_1}^* \cdot w_{\bar{a}_3}^* &= k_1 s_1, & w_{\bar{a}_2}^* \cdot w_{\bar{a}_3}^* &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $w(\cdot)$ はウェブにおける量を示している。式(6.a,d,f)より以下の微分方程式を得る。

$$w_{\bar{a}_2}^* \cdot \bar{a}_2^* = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、以下の関係式を用いた。

$$\bar{a}_1^* = \bar{a}_2^* \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(7)を初期条件($s_1 = 0$ において、 $w_{\bar{a}_2}^* = \bar{e}_3$)のもとで積分すると、

$$w_{\bar{a}_2}^* = \bar{e}_3 \quad \dots\dots\dots (9)$$

を得る。式(9)を式(8)に代入し、初期条件($s_1 = 0$ において、 $w_{\bar{a}_1}^* = \sqrt{G_0} \bar{e}_1$ 、但し $\sqrt{G_0} = 1 + \varepsilon_0$, ε_0 棒軸の軸方向ひずみ)のもとで積分すると、

$$w_{\bar{a}_1}^* = (\sqrt{G_0} + \bar{k}_2 s_1) \bar{e}_1 - \bar{k}_1 s_1 \bar{e}_2 \quad \dots\dots\dots (10)$$

を得る。初期ねじれ率のために $w_{\bar{a}_m}^*$ が直交していないため、 $w_{\bar{a}_3}^*$ は式(6.b,c,e)を用いることにより

$$w_{\bar{a}_3}^* = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 \quad \dots\dots\dots (11)$$

と求まり、ここに、

$$\begin{aligned} a_1 &= [k_1 s_1 (\sqrt{G_0} + \bar{k}_2 s_1) - \bar{k}_1 s_1 \sqrt{(\sqrt{G_0} + \bar{k}_2 s_1)^2 + (\bar{k}_1 s_1)^2 - (k_1 s_1)^2}] / [(\sqrt{G_0} + \bar{k}_2 s_1)^2 + (\bar{k}_1 s_1)^2], \\ a_2 &= [-k_1 \bar{k}_1 (s_1)^2 - (\sqrt{G_0} + \bar{k}_2 s_1) \sqrt{(\sqrt{G_0} + \bar{k}_2 s_1)^2 + (\bar{k}_1 s_1)^2 - (k_1 s_1)^2}] / [(\sqrt{G_0} + \bar{k}_2 s_1)^2 + (\bar{k}_1 s_1)^2] \quad \dots (12) \end{aligned}$$

である。フランジの変形後の基底ベクトルも同様の手法により求まる。上フランジの量を $u(\cdot)$ で表わすと、変形後の基底ベクトルは以下のように表される。

$$\begin{aligned} u_{\bar{a}_2}^* &= b_1 \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2, & u_{\bar{a}_1}^* &= c_1 \bar{e}_1, & u_{\bar{a}_3}^* &= d_1 \bar{e}_1 \\ b_1 &= [k_1 h_2 (\sqrt{G_0} - \bar{k}_2 h_2) - \bar{k}_1 h_2 \sqrt{(\sqrt{G_0} - \bar{k}_2 h_2)^2 + (\bar{k}_1 h_2)^2 - (k_1 h_2)^2}] / [(\sqrt{G_0} - \bar{k}_2 h_2)^2 + (\bar{k}_1 h_2)^2], \\ b_2 &= [k_1 \bar{k}_1 (h_2)^2 + (\sqrt{G_0} - \bar{k}_2 h_2) \sqrt{(\sqrt{G_0} - \bar{k}_2 h_2)^2 + (\bar{k}_1 h_2)^2 - (k_1 h_2)^2}] / [(\sqrt{G_0} - \bar{k}_2 h_2)^2 + (\bar{k}_1 h_2)^2] \\ c_1 &= \sqrt{G_0} - \bar{k}_2 h_2 + (b_1 - \bar{k}_3 b_2) s_2, & c_2 &= \bar{k}_1 h_2 + (b_2 + \bar{k}_3 b_1) s_2, \\ c_3 &= (-\bar{k}_2 b_1 + \bar{k}_1 b_2) s_2, & d_1 &= -b_2 (k_1 s_2 - c_3 d_3) / (b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ d_2 &= b_1 (k_1 s_2 - c_3 d_3) / (b_1 c_2 - b_2 c_1), & d_3 &= [e_2 + \sqrt{(e_2)^2 - e_1 e_3}] / e_1, \\ e_1 &= (b_1 c_2 - b_2 c_1) + [(b_1)^2 + (b_2)^2] \times (c_3)^2, & e_2 &= k_1 s_2 [(b_1)^2 + (b_2)^2] c_3, \\ e_3 &= (k_1 s_2)^2 [(b_1)^2 + (b_2)^2] - (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

なお、式(13)において $h_2 \rightarrow -h_3$, $s_2 \rightarrow s_3$ と置き換えることにより下フランジの変形後の基底ベクトルが求まる。

4. 任意点の変位ベクトル

I 形部材の任意点における変位ベクトルを求めると

$$U = u + Y^2 (\bar{e}_2 - e_2) + Y^3 (\bar{e}_3 - e_3) + u_{\text{warping}} \quad \dots\dots\dots (14)$$

となり、ここに右辺第一項は棒軸の変位、第二、三項は曲げ変位、第四項は反り変位を示し

$$u_{\text{warping}} = \begin{cases} n_1 [a_1 \bar{e}_1 + (1 + a_2) \bar{e}_2] & \text{for web plates} \\ (s_1 b_1 + n_2 d_1) \bar{e}_1 + [s_2 (-1 + b_2) + n_2 d_2] \bar{e}_2 + n_2 (d_3 - 1) \bar{e}_3 & \text{for upper flange plates} \end{cases}$$

と書け、式(15.b)において $h_2 \rightarrow -h_3$, $s_2 \rightarrow s_3$, $n_2 \rightarrow n_3$ に置き換えることにより下フランジの反り変位ベクトルが得られる。

(参考文献)

- 1) 倉方慶夫：東京大学工学系研究科博士論文，1976年 3月。
- 2) Iura and Hirashima：Proc. of JSCE Structural Eng./Earthquake Eng. Vol.2, No.2, 107