

I-63

薄肉曲線部材の有限変位場

長岡技術科学大学大学院 学生会員 岩崎英治

長岡技術科学大学建設系 正会員 林 正

1. まえがき： 薄肉断面部材の有限変位場に関する論文は、数多く報告されているが、そり変位に関しては、何れの報告も線形である。本報告では、先に発表したりひ空間曲線材の厳密な幾何量を用い、そり変位に関する偏微分方程式に対しては摂動法を用いて、そり変位を求めた。解析では次の仮定を用いる。

1) 横断面形状は部材軸方向に一定とする。また、任意点の変位は断面剛の仮定に従う変位に、横断面に垂直な方向の変位を加えたものとする。

2) 薄肉断面のせん断ひずみによる変形は、サン・ブナンのねじりによる変形のみを考える。

3) 板厚方向の座標値 n の2次以上の項は省略する。

2. 座標系と変位前の幾何学量： 部材軸上の任意点 O を原点とする

直交曲線座標 (x, y, z) と、板厚中心線上の任意点 C を原点とする曲線

座標 (x, s, n) を用いる。ここに部材軸に沿って x 軸をとり、 y, z 軸を

部材軸の法平面内に右手系になるようにとる。また s 軸は板厚中心線

に沿ってとり n 軸は板厚中心線の法線方向に右手系になるようにとる。

空間曲線材としての幾何学量等の記号は、文献 1) 2) を参照されたい。

空間固定点 O に対する薄肉断面内の任意点 P の位置ベクトル $\mathbf{r}$ は、

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3 \quad (1)$$

点 P の座標系 (x, s, n) での共変基底ベクトル $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ は、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= t_0 \mathbf{e}_1 - x_1 z \mathbf{e}_2 + x_1 y \mathbf{e}_3, & \mathbf{t}_2 &= (1-n/R) \cos \beta \mathbf{e}_2 + (1-n/R) \sin \beta \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_3 &= -\sin \beta \mathbf{e}_2 + \cos \beta \mathbf{e}_3, & t_0 &= 1 - x_3 y + x_2 z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

3. 有限変位場： 薄肉断面内の任意点 P の変位 $\mathbf{u}_p$ は、仮定 1) により、点 O の変位 $\mathbf{u}_0$ 、点 O に対する点 P の位置ベクトル $\mathbf{r}_p$ 、点 P でのそり変位 $\tilde{\mathbf{u}}_p$ と文献 2) による回転行列 $\mathbf{R}_0$ を用いて、

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_0 + (\mathbf{R}_0 - \mathbf{I}) \mathbf{r}_p + \mathbf{R}_0 \tilde{\mathbf{u}}_p \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに、} \mathbf{u}_p &= (u_p, v_p, w_p)^t, & \mathbf{u}_0 &= (u_0, v_0, w_0)^t \\ \tilde{\mathbf{u}}_p &= (\tilde{u}_p, 0, 0)^t, & \mathbf{r}_p &= (0, y, z)^t \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

変位後の点 P の位置ベクトル $\mathbf{r}^*$ は、

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_0^* + y \mathbf{e}_2^* + z \mathbf{e}_3^* + \tilde{\mathbf{u}}_p \mathbf{e}_1^* \quad (5)$$

変位後の点 P の基底ベクトル $\mathbf{t}_1^*, \mathbf{t}_2^*, \mathbf{t}_3^*$ は、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}_1^* &= (t_0 + \hat{\epsilon}_0 + \frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial x}) \mathbf{e}_1^* + (-x_1^* z + x_3^* \tilde{u}_p) \mathbf{e}_2^* + (x_1^* y - x_2^* \tilde{u}_p) \mathbf{e}_3^* \\ \mathbf{t}_2^* &= \frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial s} \mathbf{e}_1^* + (1-n/R) \cos \beta \mathbf{e}_2^* + (1-n/R) \sin \beta \mathbf{e}_3^*, & \mathbf{t}_3^* &= \frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial n} \mathbf{e}_1^* - \sin \beta \mathbf{e}_2^* + \cos \beta \mathbf{e}_3^* \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

変位前後の基底ベクトルからグリーンのひずみテンソル ϵ_{ij} は次式のようにになる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{2} ((t_0 + \hat{\epsilon}_0)^2 - t_0^2 + (y^2 + z^2) ((x_1^*)^2 - x_1^2)) + (t_0 + \hat{\epsilon}_0) \frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial x} - x_1^* (x_3^* z + x_2^* y) \tilde{u}_p \\ &\quad + \frac{1}{2} ((\frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial x})^2 + (x_2^*)^2 + (x_3^*)^2 \tilde{u}_p^2), & 2\epsilon_{xs} &= (t_0 + \hat{\epsilon}_0) \frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial s} + (1-n/R) (r_s \bar{x}_1 + x_n^* \tilde{u}_p) \\ 2\epsilon_{nx} &= (t_0 + \hat{\epsilon}_0) \frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial n} + \frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial n} + r_n \bar{x}_1 - x_s^* \tilde{u}_p, & \epsilon_{ss} &= \frac{1}{2} (\frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial s})^2, & \epsilon_{nn} &= \frac{1}{2} (\frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial n})^2, & 2\epsilon_{sn} &= \frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial s} \frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial n} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

横断面内でのひずみ $\epsilon_{ss}, \epsilon_{nn}, \epsilon_{sn}$ には、そりによるひずみだけが現れている。

また、これらは変位の2次のオーダーであるから、以下では、 $\epsilon_{ss} = \epsilon_{nn} = \epsilon_{sn} = 0$ とおく。

式 (7) のひずみは、曲線座標系 (x, s, n) で表されており、パラメータ x による座標軸と s 軸、 n 軸は直交していないため、局所デカルト座標系におけるひずみテンソル ϵ_{ij} に変換する。この関係式は、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\epsilon_{xx}}{t_0^2} - 2\epsilon_{xs} \frac{x_1 r_s}{t_0^2 (1-n/R)} - 2\epsilon_{nx} \frac{x_1 r_n}{t_0^2} & \epsilon_{xs} &= \frac{\epsilon_{xs}}{t_0 (1-n/R)} & \epsilon_{nx} &= \frac{\epsilon_{nx}}{t_0} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

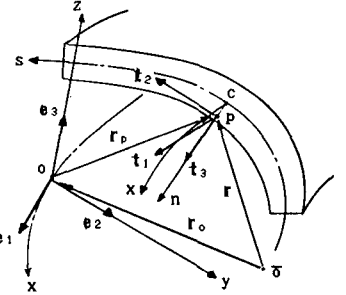


図-1. 座標系と位置ベクトル

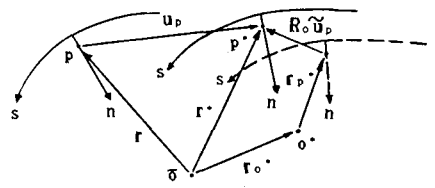


図-2. 変位ベクトル

4. そり変位: そり変位 $\tilde{u}_0$ を $n = 0$ の近傍で n について級数展開し仮定 3)を用いると、

$$\tilde{u}_0 = \tilde{u}_0 + n \tilde{u}_1 \quad (9)$$

仮定 2)と、そりに対する適合条件式は、次式のようになる。

$$\bar{\epsilon}_{xs} = 0 \quad (\text{開断面}) \quad \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial s} ds = 0 \quad (\text{閉断面}) \right. \quad \epsilon_{nx} = 0 \quad (10)$$

式(7)の第2式を、式(8)の第2式に代入し、 $2\epsilon_{xs}$ を n に関して積分し、その積分値を $\tilde{q}$ とおく。

ここで、そりの非線形項を無視すれば $\delta = 0$ 、考慮すれば $\delta = 1$ で、 $0 \leq \delta \leq 1$ の範囲で連続的に変化する摂動パラメータ δ を導入する。文献 3)参照。

$$\tilde{u}_0 + \epsilon_0 - \bar{\alpha}_3 \bar{y} + \bar{\alpha}_2 \bar{z} \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial s} + \bar{\Gamma}_s \bar{\alpha}_1 - \frac{\bar{\Gamma}_0}{t} \tilde{q} + \delta \left(\alpha_n \cdot \tilde{u}_0 + \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial s} \right) \right\} = 0 \quad (11)$$

α_0, α を δ に関して展開すると、

$$\tilde{u}_0 = \tilde{u}_{00} + \delta \tilde{u}_{01} + \delta^2 \tilde{u}_{02} + \dots, \quad \tilde{q} = \tilde{q}_0 + \delta \tilde{q}_1 + \delta^2 \tilde{q}_2 + \dots \quad (12)$$

これを、式(11)に代入すると δ の任意性より $\tilde{u}_{00}, \tilde{u}_{01}, \dots$ に関する連立方程式が得られる。 δ の2次以上の項の係数は微小であると考えられるので、ここではこれを無視すると、

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{u}_0 + \epsilon_0 - \bar{\alpha}_3 \bar{y} + \bar{\alpha}_2 \bar{z}) \frac{\partial \tilde{u}_{00}}{\partial s} + \bar{\Gamma}_s \bar{\alpha}_1 - \frac{\bar{\Gamma}_0}{t} \tilde{q}_0 &= 0 \\ (\tilde{u}_0 + \epsilon_0 - \bar{\alpha}_3 \bar{y} + \bar{\alpha}_2 \bar{z}) \frac{\partial \tilde{u}_{01}}{\partial s} - \frac{\bar{\Gamma}_0}{t} \tilde{q}_1 + \alpha_n \cdot \tilde{u}_{00} + \frac{\partial \tilde{u}_{00}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}_{00}}{\partial s} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

上式と、式(10)の第2式より、 $\tilde{u}_{00}, \tilde{u}_{01}$ が求まり、これよりそり変位 $\tilde{u}_0$ は、次の様になる。

$$\tilde{u}_0 = -\bar{\alpha}_1 (\bar{w}_{00} - \bar{w}_{0x} \epsilon_0 + \bar{w}_{0y} \bar{\alpha}_3 - \bar{w}_{0z} \bar{\alpha}_2 - \bar{w}_{0\theta} \bar{\alpha}_1 - \bar{w}_{0\theta'} \frac{d\alpha_1}{dx}) \quad (14)$$

ここに、 $\bar{w}_{00} = \bar{w}_{000} + \bar{w}_{100}$, $\bar{w}_{0x} = \bar{w}_{00x} + \bar{w}_{10x}$, $\bar{w}_{0y} = \bar{w}_{00y} + \bar{w}_{10y}$, $\bar{w}_{0z} = \bar{w}_{00z} + \bar{w}_{10z}$

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_{0\theta} &= \bar{w}_{10\theta}, \quad \bar{w}_{0\theta'} = \bar{w}_{10\theta'}, \quad \bar{w}_{000} = \int_0^s \left(\frac{\bar{\Gamma}_s}{\bar{\Gamma}_0} - \frac{K_{00}}{t} \right) ds \\ \bar{w}_{00x} &= \int_0^s \left(\frac{\bar{\Gamma}_s}{\bar{\Gamma}_0} - \frac{1}{t} (K_{0x} + \frac{K_{00}}{t}) \right) ds, \quad \bar{w}_{00y} = \int_0^s \left(\frac{\bar{\Gamma}_s \bar{y}}{\bar{\Gamma}_0^2} - \frac{1}{t} (K_{0y} + \frac{K_{00} \bar{y}}{t}) \right) ds \\ \bar{w}_{00z} &= \int_0^s \left(\frac{\bar{\Gamma}_s \bar{z}}{\bar{\Gamma}_0^2} - \frac{1}{t} (K_{0z} + \frac{K_{00} \bar{z}}{t}) \right) ds, \quad \bar{w}_{100} = \int_0^s \left(\frac{K_{10}}{t} - \frac{\alpha_n}{\bar{\Gamma}_0} \bar{w}_{000} \right) ds \\ \bar{w}_{10x} &= \int_0^s \left(\frac{K_{1x}}{t} + \frac{K_{10}}{\bar{\Gamma}_0 t} - \frac{\alpha_n}{\bar{\Gamma}_0} (\bar{w}_{00x} + \frac{\bar{w}_{000}}{\bar{\Gamma}_0}) \right) ds, \quad \bar{w}_{10y} = \int_0^s \left(\frac{K_{1y}}{t} + \frac{K_{10} \bar{y}}{\bar{\Gamma}_0 t} - \frac{\alpha_n}{\bar{\Gamma}_0} (\bar{w}_{00y} + \frac{\bar{w}_{000} \bar{y}}{\bar{\Gamma}_0}) - \frac{\bar{w}_{000}}{\bar{\Gamma}_0} \cos \beta \right) ds \\ \bar{w}_{10z} &= \int_0^s \left(\frac{K_{1z}}{t} + \frac{K_{10} \bar{z}}{\bar{\Gamma}_0 t} - \frac{\alpha_n}{\bar{\Gamma}_0} (\bar{w}_{00z} + \frac{\bar{w}_{000} \bar{z}}{\bar{\Gamma}_0}) - \frac{\bar{w}_{000}}{\bar{\Gamma}_0} \sin \beta \right) ds \\ \bar{w}_{10\theta} &= \int_0^s \left(\frac{K_{1\theta}}{t} - \frac{1}{\bar{\Gamma}_0} \left(\frac{\bar{\Gamma}_s}{\bar{\Gamma}_0} - \frac{K_{00}}{t} \right) \frac{\partial \bar{w}_{000}}{\partial x} \right) ds, \quad \bar{w}_{10\theta'} = \int_0^s \left(\frac{K_{1\theta'}}{t} - \frac{1}{\bar{\Gamma}_0} \left(\frac{\bar{\Gamma}_s}{\bar{\Gamma}_0} - \frac{K_{00}}{t} \right) \bar{w}_{000} \right) ds \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{00} &= \frac{H_0}{L_0}, K_{0x} = \frac{H_x}{L_0} \frac{H_0 L_x}{L_0^2}, K_{0y} = \frac{H_y}{L_0} \frac{H_0 L_y}{L_0^2}, K_{0z} = \frac{H_z}{L_0} \frac{H_0 L_z}{L_0^2}, K_{10} = \frac{M_0}{L_0}, K_{1x} = \frac{M_x}{L_0} \frac{M_0 L_x}{L_0^2} \\ K_{1y} &= \frac{M_y}{L_0} \frac{M_0 L_y}{L_0^2}, K_{1z} = \frac{M_z}{L_0} \frac{M_0 L_z}{L_0^2}, K_{1\theta} = \frac{M_{\theta}}{L_0}, K_{1\theta'} = \frac{M_{\theta'}}{L_0}, L_0 = \int_0^s \frac{ds}{t}, L_x = \int_0^s \frac{ds}{t} \frac{x}{t}, L_y = \int_0^s \frac{ds}{t} \frac{y}{t} \\ L_z &= \int_0^s \frac{ds}{t} \frac{z}{t}, H_0 = \int_0^s \frac{\bar{\Gamma}_s}{\bar{\Gamma}_0} ds, H_x = \int_0^s \frac{\bar{\Gamma}_s}{\bar{\Gamma}_0^2} ds, H_y = \int_0^s \frac{\bar{\Gamma}_s \bar{y}}{\bar{\Gamma}_0^2} ds, H_z = \int_0^s \frac{\bar{\Gamma}_s \bar{z}}{\bar{\Gamma}_0^2} ds, M_0 = \int_0^s \frac{\alpha_n}{\bar{\Gamma}_0} \bar{w}_{000} ds \\ M_x &= \int_0^s \frac{\alpha_n}{\bar{\Gamma}_0} (\bar{w}_{00x} + \frac{\bar{w}_{000}}{\bar{\Gamma}_0}) ds, M_y = \int_0^s \left(\frac{\alpha_n}{\bar{\Gamma}_0} (\bar{w}_{00y} + \frac{\bar{w}_{000} \bar{y}}{\bar{\Gamma}_0}) + \frac{\bar{w}_{000}}{\bar{\Gamma}_0} \cos \beta \right) ds, M_{\theta} = \int_0^s \frac{1}{\bar{\Gamma}_0} \left(\frac{\bar{\Gamma}_s}{\bar{\Gamma}_0} - \frac{K_{00}}{t} \right) \bar{w}_{000} ds \\ M_z &= \int_0^s \left(\frac{\alpha_n}{\bar{\Gamma}_0} (\bar{w}_{00z} + \frac{\bar{w}_{000} \bar{z}}{\bar{\Gamma}_0}) + \frac{\bar{w}_{000}}{\bar{\Gamma}_0} \sin \beta \right) ds, M_{\theta'} = \int_0^s \frac{1}{\bar{\Gamma}_0} \left(\frac{\bar{\Gamma}_s}{\bar{\Gamma}_0} - \frac{K_{00}}{t} \right) \frac{\partial \bar{w}_{000}}{\partial x} ds \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

次ぎに、式(10)の第3式より、 $\tilde{u}_1$ を求める。 $\alpha_s = \alpha_2 \cos \beta + \alpha_3 \sin \beta$, $\alpha_n = -\alpha_2 \sin \beta + \alpha_3 \cos \beta$

$$2\epsilon_{nx} = \frac{1}{\bar{\Gamma}_0} \left(1 - \frac{\alpha_s}{\bar{\Gamma}_0} \right) \left(\tilde{u}_0 + \epsilon_0 - \bar{\alpha}_3 \bar{y} + \bar{\alpha}_2 \bar{z} \right) \tilde{u}_1 + \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x} \tilde{u}_1 + \bar{\Gamma}_n \tilde{u}_1 - \alpha_s \cdot \tilde{u}_0 + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} \tilde{u}_1 = 0 \quad (16)$$

上式で、 $\dots$ 線部分は省略し n の任意性より $\{\dots\} = 0$ として解くと、

$$\tilde{u}_1 = -\bar{\alpha}_1 (\bar{w}_{10} - \bar{w}_{1x} \epsilon_0 + \bar{w}_{1y} \bar{\alpha}_3 - \bar{w}_{1z} \bar{\alpha}_2 - \bar{w}_{1\theta} \bar{\alpha}_1 - \bar{w}_{1\theta'} \frac{d\alpha_1}{dx}) \quad (17)$$

ここに、 $\bar{w}_{10} = \frac{\alpha_s \bar{w}_{00} + \bar{\Gamma}_n}{\bar{\Gamma}_0}$, $\bar{w}_{1x} = \frac{1}{\bar{\Gamma}_0} (\alpha_s (\bar{w}_{0x} + \frac{\bar{w}_{00}}{\bar{\Gamma}_0}) + \frac{\bar{\Gamma}_n}{\bar{\Gamma}_0})$

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_{1y} &= \frac{1}{\bar{\Gamma}_0} (\alpha_s (\bar{w}_{0y} + \frac{\bar{w}_{00} \bar{y}}{\bar{\Gamma}_0}) + \frac{\bar{\Gamma}_n \bar{y}}{\bar{\Gamma}_0} + \bar{w}_{00} \sin \beta), \quad \bar{w}_{1z} = \frac{1}{\bar{\Gamma}_0} (\alpha_s (\bar{w}_{0z} + \frac{\bar{w}_{00} \bar{z}}{\bar{\Gamma}_0}) + \frac{\bar{\Gamma}_n \bar{z}}{\bar{\Gamma}_0} - \bar{w}_{00} \cos \beta) \\ \bar{w}_{1\theta} &= \frac{1}{\bar{\Gamma}_0} (\alpha_s (\bar{w}_{0\theta} - \frac{\bar{w}_{00}}{\bar{\Gamma}_0} \frac{\partial \bar{w}_{00}}{\partial x}) - \frac{\bar{\Gamma}_n}{\bar{\Gamma}_0} \frac{\partial \bar{w}_{00}}{\partial x}), \quad \bar{w}_{1\theta'} = \frac{1}{\bar{\Gamma}_0} (\alpha_s (\bar{w}_{0\theta'} - \frac{\bar{w}_{00} \theta^2}{\bar{\Gamma}_0}) - \frac{\bar{\Gamma}_n \bar{w}_{00}}{\bar{\Gamma}_0}) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式(14), (17)を、式(3)に用いると任意点の変位が求まる。なお、開断面の場合 $K_{ij} = 0$ とする。

1) 林・前田:土木学会第40回年講概要集 1985 I-57

2) 前田・林:土木学会構造工学論文集Vol. 32-A 1986

3) 薄木・稼農:土木学会構造工学論文集Vol. 25-A 1979