

I-59

剛体棒要素モデルによる はり一柱の有限変位解析

日本道路公団 正会員○吉川 藤雄

東京都立大学 正会員 野上 邦栄

東京都立大学 正会員 伊藤 文人

1. まえがき 一般に構造物の最終荷重の推定は、材料および幾何学的非線形性を合わせ持つ問題として解析する必要があり、多くの解析手法が提案されている。最近、この種の問題に対してより合理的方法として構造物の崩壊メカニズムを仮定し、極限強度解析の立場から考案された新しい離散化モデルがある。このモデルは「剛体-バネ」モデルと呼ばれ、崩壊、すべりおよび亀裂などに関する問題に 응용されている。しかし、棒部材に対する一連のモデルは面内問題が中心であり、横座屈問題などにおいて重要になるそり変形を考慮した研究は少ない^{1) 2)}。そこで、本報告では有限な回転変位およびそり変形を考慮した相対変位場の定式化を行い、薄肉断面部材の幾何学的および材料非線形問題を対象にできるより一般的な「剛体棒要素」モデルを提案する。

2. バネ系の理論 いま、Fig.1 のような直交デカルト座標系を持つ部材の断面内任意点の変位は

$$\left. \begin{aligned} u^* &= u_s^* + (k_{11} - k_{11}^0)(x - x_s) + (k_{12} - k_{12}^0)(y - y_s) + (k_{13} - k_{13}^0)z + (k_{13}\phi' - k_{13}^0\phi')\omega_s \\ v^* &= v_s^* + (k_{21} - k_{21}^0)(x - x_s) + (k_{22} - k_{22}^0)(y - y_s) + (k_{23} - k_{23}^0)z + (k_{23}\phi' - k_{23}^0\phi')\omega_s \\ w^* &= w_s^* + (k_{31} - k_{31}^0)x + (k_{32} - k_{32}^0)y + (k_{33} - k_{33}^0)z + (k_{33}\phi' - k_{33}^0\phi')\omega \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

と与えられる。ここに、 $\omega = \omega^c - \omega_s$ で与えられる単位そり関数であり k_{ij} は座標変換成分である。また添字の *, 0 は各々増分変位および初期不整である。

さて、部材を剛体に要素分割し、その剛体要素(i) 内の節点(一般には重心)の変位は(w_{ci} u_{si} v_{si} u'_{si} v'_{si} ϕ_i) の6自由度からなるものとする。また、剛体要素のねじれ率 ϕ'_i は

$$\phi'_i = \frac{1}{2} [\phi_{i+1}(1/S_i) + \phi_i(1/S_{i-1}) - \phi_{i-1}(1/S_{i-1})] \dots \dots \dots (2)$$

と近似できるものとする。ここに、 S_i はバネ要素長さである。この時、剛体要素(i) と剛体要素(i+1) の境界面上におけるk番目の軸バネの対応する取付点の変位(u_i^* , v_i^* , w_i^*) および(u_{i+1}^* , v_{i+1}^* , w_{i+1}^*) は、剛体要素長さを l_i と置き、境界面上の座標(x_{ik} , y_{ik} , $l_i/2$) および(x_{ik} , y_{ik} , $-l_{i+1}/2$) を式(1)に代入することにより与えられるので、このバネ取付点の相対変位 $R^T = (u_{i+1}^* - u_i^*, v_{i+1}^* - v_i^*, w_{i+1}^* - w_i^*)$ は、境界面上に採られた局所座標系($\xi \eta \zeta$)に関する相対変位

$\bar{R}^T = (\bar{U}_{ik}, \bar{V}_{ik}, \bar{W}_{ik})$ との間に

$$\bar{R} = B R \dots \dots \dots (3)$$

の関係が成り立つ。ここに、Bは局所座標系(xyz)と($\xi \eta \zeta$)の間の座標変換行列である。

したがって、変形に伴う軸バネの相対変位 $\bar{W}_{ik}$ は、有限変位理論におけるひずみ-変位関係と同程度の精度を有する次式が得られる。

$$\bar{W}_{ik} = \bar{W}_{ik} + (\bar{U}_{ik}^2 + \bar{V}_{ik}^2)/(2S_i) \dots \dots (4)$$

いま、分布軸バネ、St.Venantのねじれバネおよび剪断バネから成るバネ系において、全バネ要素による仮想仕事 $\delta \Pi_t$ は

$$\delta \Pi_t = \sum_i \left[\sum_k F_{ik}^a \delta \bar{W}_{ik} + F_{gi} S_i \delta \phi_i^* + F_{xi}^s \delta \bar{U}_{si} + F_{yi}^s \delta \bar{V}_{si} \right] \dots \dots \dots (5)$$

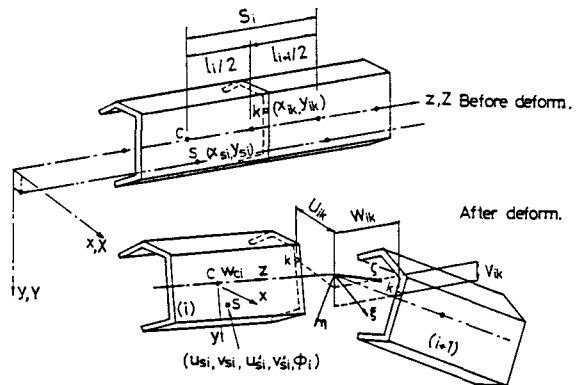
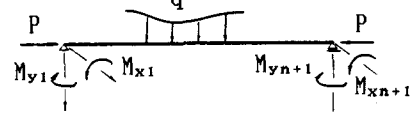


Fig.1 Coordinate systems and displacements

と与えられる。ここに、 F_{ik}^a , K_{ik}^a , F_{gi} , K_{gi} および F_{xi} , F_{yi} , K_{xi}^s , K_{yi}^s はそれぞれ軸バネ、St. Venantのねじれバネおよび剪断バネのバネ力およびバネ常数を表し、 n はバネ要素数である。

また、Fig.2のような荷重が作用する時、これらの外力による全ポテンシャル損失 Π_w は、

$$\Pi_w = P \left(\frac{1}{2} (w_{ci+1}^* - w_{ci}^*) + \sum_{i=1}^{n+1} q_i (\cos u_{si}^* \cos v_{si}^* - \cos u_{si}^* \cos v_{si}^*) \right) + M_{xi} v_{si}^* + M_{xn+1} v_{sn+1}^* + M_{yi} u_{si}^* + M_{yn+1} u_{sn+1}^* + \sum_{i=1}^{n+1} q_i v_i^* \quad (6)$$



と与えられるので、式(5) および式(6) の第1変分による

$$\delta \Pi_t - \delta \Pi_w = 0 \quad \dots \dots \dots (7)$$

の条件式から $6(n+1)$ 本の非線形連立釣り合い方程式が得られる。

Fig.2 Forces acting at member

バネ常数の決定は、連続体としての内力による仮想仕事 $\delta \Pi_e$ と式(5) で与えられるバネ系のバネによる仮想仕事 $\delta \Pi_t$ が、同一の変形状態に対して $\delta \Pi_e = \delta \Pi_t \dots \dots \dots (8)$

になるように選定するのが良い。この式を満足する条件は、薄肉断面部材の場合次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \int_A E dA / S_i &= \sum_k K_{ik}^a, & \int_A E x dA / S_i &= \sum_k K_{ik}^a x_{ik}, & \int_A E a^2 dA / S_i &= \sum_k K_{ik}^a a_{ik}^2 \\ \int_A E y^2 dA / S_i &= \sum_k K_{ik}^a y_{ik}^2, & \int_A E y dA / S_i &= \sum_k K_{ik}^a y_{ik}, & \int_A E y a^2 dA / S_i &= \sum_k K_{ik}^a y_{ik} a_{ik}^2 \\ \int_A E x^2 dA / S_i &= \sum_k K_{ik}^a x_{ik}^2, & \int_A E \omega dA / S_i &= \sum_k K_{ik}^a \omega_{ik}, & \int_A E x a^2 dA / S_i &= \sum_k K_{ik}^a x_{ik} a_{ik}^2 \\ \int_A E \omega^2 dA / S_i &= \sum_k K_{ik}^a \omega_{ik}^2, & \int_A E y \omega dA / S_i &= \sum_k K_{ik}^a y_{ik} \omega_{ik}, & \int_A E a^2 \omega dA / S_i &= \sum_k K_{ik}^a a_{ik}^2 \omega_{ik} \\ \int_A E a^4 dA / S_i &= \sum_k K_{ik}^a a_{ik}^4, & \int_A E x \omega dA / S_i &= \sum_k K_{ik}^a x_{ik} \omega_{ik}, & \int_A E x y dA / S_i &= \sum_k K_{ik}^a x_{ik} y_{ik} \\ \int_A G \Theta^2 dA / S_i &= K_{gi}, & \int_A G dA / S_i &= K_{xi}^s = K_{yi}^s \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに、 E , G は弾性係数および剪断弾性係数、 $a_{ik}^2 = (x_{ik} - x_{si})^2 + (y_{ik} - y_{si})^2$ である。また、板厚中心線方向に s 軸およびこの軸に直交する方向に n 軸を定義し、

閉断面部の板厚中心線で囲まれた面積を A_c 、板厚を t と置く時右式の関係を持つ。

$$\Theta = \begin{cases} 2n & \text{(開断面)} \\ 2n + \frac{2A_c}{t \oint 1/t ds} & \text{(単一閉断面)} \end{cases}$$

いま、弾塑性問題に対して次の仮定：①材料特性は履歴型完全弾塑性体のもを用いる。②材料の降伏は、軸方向応力のみにより決まるものとし剪断応力の影響は無視する。③非弾性領域における曲げおよび曲げねじれ剛性は弾性領域のみを有効とし、St. Venant のねじれ剛性は塑性流れ理論に従うものとする。を導入する時、剛体棒要素モデルのバネ要素(i)における k 番目の軸バネのバネ力およびバネ常数は、

$$\left. \begin{aligned} -\varepsilon_{yik} < \varepsilon_{ik} < \varepsilon_{yik}, & |\varepsilon_{ik}| \geq \varepsilon_{yik}, & |\varepsilon_{ik}| < \bar{\varepsilon}_{ik} \\ F_{ik} &= EA_{ik} \varepsilon_{ik} & F_{ik} &= EA_{ik} \varepsilon_{yik} & F_{ik} &= \bar{F}_{ik} - EA_{ik} (\bar{\varepsilon}_{ik} - \varepsilon_{ik}) \\ K_{ik}^a &= EA_{ik} / S_i & K_{ik} &= 0 & K_{ik}^a &= EA_{ik} / S_i \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots (10)$$

と与えられる。ここに ε_{ik} , ε_{yik} は軸バネの全ひずみおよび降伏ひずみ、 $\bar{F}_{ik}$ および $\bar{\varepsilon}_{ik}$ は、最大バネ力およびそのひずみ、 A_{ik} は k 番目の軸バネの分担面積を意味する。また、St. Venant のねじれバネ常数は仮定③を考慮すると

$$K_{gi} = G J_i / S_i \quad \dots \dots \dots (11)$$

と与えられる。ここに、 J_i は弾性領域の断面要素のみを考慮した St. Venantのねじれ常数である。

特に、弾性問題の場合、バネ要素(i)の k 番目の軸バネは、

$$K_{ik}^a = EA_{ik} / S_i, \quad x_{ik}^2 = r_x^2, \quad y_{ik}^2 = r_y^2, \quad a_{ik}^2 = \int_A a^2 dA / A_i, \quad \omega_{ik}^2 = \int_A \omega^2 dA / A_i \quad \dots \dots (12)$$

と置くことにより式(9)の条件は満足することになる。ここに、 r_x および r_y は x および y 軸に関する断面2次半径である。なお、2軸対称断面部材の場合は、軸バネを中立軸に関して対称に4本配置(平面問題では2本配置)した剛体棒要素モデルを適用するのが良い。具体的計算例については当日発表する。

文献 1) 田中充夫・野上邦栄・伊藤文人：有限剛体要素モデルによるはりの横ねじり座屈解析，土木学会年次学術講演会，第40回，1985 2) 深沢泰晴・土橋浩・長谷川彰夫：有限剛体モデルによる薄肉材の座屈問題の一定式化，構造工学論文集，1986