I-57　増分法による平面骨組有限変位問題の直接的計算法

新日本技研（株）　正会員　倉方慶夫
同上　正会員　○高橋真太郎

1. まえがき

骨組構造の有限変位問題の数値計算法は、手法の違いにより、直接計算法と剛体変位除去の手法に分類されているが、最近では簡便さからもっぱら後者の方法が実用に供せられている。それは前者の手法では非線形次数が高いと扱いが困難になり、非線形次数をおとすと大変位問題で誤差が大きくなることによる。しかし微小変位場を基本とした後者の手法では固有値問題や線形化有限変位が扱えないため、このような場合には非線形次数をおとした前者の方法あるいはそれと後者の手法の混合法などが用いられる。

ところで有限変位場の記述には物体固定座標を用いたラグランジュ表現が用いられる。すなわち、座標は物体と共に変位し変形するわけであるが、剛体変位除去の手法ではそれと同じ状態をオイラー表現的な局所直交直線座標の集合体として表わすものであるから、自ずと要素の分割を小さくとる必要がある。本報告はこのような欠点を改良する目的のもので、分類としては増分法による直接計算法である。剛性方程式の誘導には有限要素法を用いたがその変位関数に多少の工夫を加えたものである。その結果、エラスティカのような大変位問題も一有限要素のみで精度よく計算できるものとなっている。ここで用いた方法は平面骨組よりも立体骨組の方がより有効となると考えられる。それは変位後に部材が捩れると直交直線座標を用いた剛体変位除去の手法では座標の捩れを表現できないからである。

2. 変位場

棒軸線上の変位を変位前の基本ベクトル方向に分解して

$$\mathbf{u}_o = v_o \mathring{i}_y + w_o \mathring{i}_z \qquad (1)$$

と表わす。このとき棒軸線上の変形量や角変位は

○伸張変形　：$\varepsilon_o = \{(v_o')^2 + (1+w_o')^2\}^{1/2} - 1 \qquad (2)$

○たわみ角α：
$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= v_o'/(1+\varepsilon_o) \\ \cos\alpha &= (1+w_o')/(1+\varepsilon_o) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

○曲率　κ　：$\kappa = -\alpha'$
$$= -\{(1+w_o')v_o'' - v_o' w_o''\}/(1+\varepsilon_o)^3 \qquad (4)$$

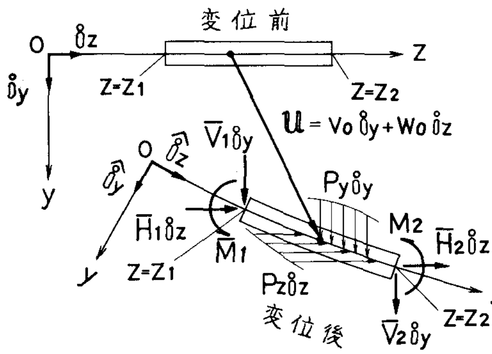


図-1　棒要素の座標、変位および外力

となる。ここで、これらを増分形式に書き改める。すなわち

$$v_o = v_o^{(0)} + \Delta v_o,\quad w_o = w_o^{(0)} + \Delta w_o,\quad \alpha = \alpha^{(0)} + \Delta\alpha,\quad \varepsilon_o = \varepsilon_o^{(0)} + \Delta\varepsilon_o \qquad (5)$$

とおく。ここに、$(\ )^{(0)}$は増分前の変位場の諸量であり、$\Delta(\ )$はそれらの増分量である。式(5)を(2)〜(4)に代入し、増分量に関する3次以上の非線形項および微小ひずみを前提として1に対し$\varepsilon_o^{(0)}$を無視すると

$$\left.\begin{aligned}
\Delta v_o' &= \cos\alpha^{(0)}\cdot\Delta\alpha + \sin\alpha^{(0)}\cdot\Delta\varepsilon_o - \tfrac{1}{2}\sin\alpha^{(0)}\cdot\Delta\alpha^2 + \cos\alpha^{(0)}\cdot\Delta\alpha\cdot\Delta\varepsilon_o \\
\Delta w_o' &= -\sin\alpha^{(0)}\cdot\Delta\alpha + \cos\alpha^{(0)}\cdot\Delta\varepsilon_o - \tfrac{1}{2}\cos\alpha^{(0)}\cdot\Delta\alpha^2 - \sin\alpha^{(0)}\cdot\Delta\alpha\cdot\Delta\varepsilon_o \\
\Delta\varepsilon_o &= \cos\alpha^{(0)}\cdot\Delta w_o' + \sin\alpha\cdot\Delta v_o' + \tfrac{1}{2}\{(\Delta v_o')^2 + (\Delta w_o')^2\} \\
\Delta\alpha &= \cos\alpha^{(0)}\cdot\Delta v_o' - \sin\alpha^{(0)}\cdot\Delta w_o', \quad \Delta\kappa = -\Delta\alpha'
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

3. 変位関数

変位前に直線材であっても変位後は一般に曲線材となっている。すなわち座標も曲線座標となっているので、微小変位をとったとしても、一般によく用いられるような要素中間点の変位をZの3次式で補間した変位関数では、それから計算される変形量は適合したものではなくなる。そこで要素の中間点のたわみ角と軸ひずみをZの

2次式で補間し、各増分段階での変形状態に合わせて、それらを積分し変位関数を求める。そのため増分変位は微小として式（6a,b）を線形化して次のように表わす。（2次形式でも変位関数を誘導してあるので、その結果については講演当日に発表する）

$$\Delta V_0' = \cos\alpha^{(0)}\cdot\Delta\alpha^* + \sin\alpha^{(0)}\Delta\varepsilon_0^*,\quad \Delta W_0' = -\sin\alpha^{(0)}\cdot\Delta\alpha^* + \cos\alpha^{(0)}\cdot\Delta\varepsilon_0^* \tag{7}$$

ここに、$\Delta\alpha$や$\Delta\varepsilon_0$の肩付に$*$を付けたのは線形化の結果これらの本来の意味を必ずしも表わさなくなるため、もとのものと区別するためのものである。すなわち、式(7)を式（6c, d）に代入すると次のようである。

$$\Delta\varepsilon_0 = \Delta\varepsilon_0^* + \tfrac{1}{2}(\Delta\alpha^*)^2,\quad \Delta\alpha = \Delta\alpha^* \tag{8}$$

次に$\Delta\alpha^*$と$\Delta\varepsilon_0^*$を次のように補間する。

$$\Delta\alpha^* = g_1\Delta\alpha_1^* + g_2\Delta\alpha_2^* + g_3\Delta C_\alpha,\quad \Delta\varepsilon_0^* = g_1\Delta\varepsilon_1^* + g_2\Delta\varepsilon_2^* + g_3\Delta C_\varepsilon \tag{9}$$

ここに要素両端の座標をz_1, z_2 ($z_1 < z_2$)、要素の長さをℓ ($= z_2 - z_1$)とするとき

$$g_1 = 1 - 4\mu + 3\mu^2,\quad g_2 = -2\mu + 3\mu^2,\quad g_3 = -6\mu + 6\mu^2,\quad \mu = (z - z_1)/\ell \tag{10}$$

$$\Delta\alpha_1^* = \Delta\alpha^*(z=z_1),\quad \Delta\alpha_2^* = \Delta\alpha^*(z=z_2),\quad \Delta\varepsilon_1^* = \Delta\varepsilon_0^*(z=z_1),\quad \Delta\varepsilon_2^* = \Delta\varepsilon_0^*(z=z_2) \tag{11}$$

であり、ΔC_α、ΔC_εは次の条件から決まる未定定数である。すなわち、式(7)を積分すると

$$\Delta V_2 = \Delta V_1 + \int_{z_1}^{z_2}(\cos\alpha^{(0)}\cdot\Delta\alpha^* + \sin\alpha^{(0)}\cdot\Delta\varepsilon_0^*)dz,\quad \Delta W_2 = \Delta W_1 + \int_{z_1}^{z_2}(-\sin\alpha^{(0)}\cdot\Delta\alpha^* + \cos\alpha^{(0)}\cdot\Delta\varepsilon_0^*)dz \tag{12}$$

ここに、$\Delta V_1 = \Delta V_0(z=z_1)$、$\Delta V_2 = \Delta V_0(z=z_2)$、$\Delta W_1 = \Delta W_0(z=z_1)$、$\Delta W_2 = \Delta W_0(z=z_2)$　(13)

であり、式（12）からΔC_αやΔC_εが要素両端の変位や変形量で表わせる。また、いま考えている増分前の変位や変形量は、それまでの各増分段階における増分値の累積値として求まる。

4. 仮想仕事式と剛性方程式

各増分段階のつり合いに対し、増分の二次項を無視した仮想仕事は次のように表わせる。

$$\int_{z_1}^{z_2}\{(N^{(0)}+\Delta N)\delta\Delta\varepsilon_0 - (M^{(0)}+\Delta M)\delta\Delta\alpha'\}dz - \int_{z_1}^{z_2}\{(P_y^{(0)}+\Delta P_y)\delta\Delta V_0 + (P_z^{(0)}+\Delta P_z)\delta\Delta W_0\}dz$$
$$-\left[n_z\{(\bar{V}^{(0)}+\Delta\bar{V})\delta\Delta V_0 + (\bar{H}^{(0)}+\Delta\bar{H})\delta\Delta W_0 - (\bar{M}^{(0)}+\Delta\bar{M})\delta\Delta\alpha\right]_{z_1}^{z_2} = 0 \tag{14}$$

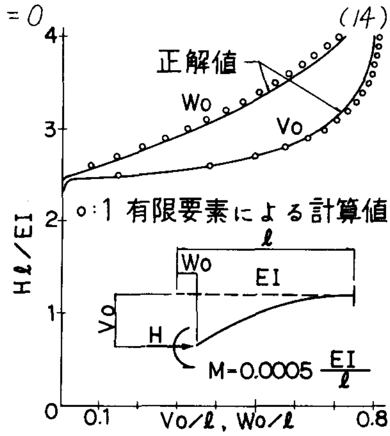
ここに、N, M　：軸方向力と曲げモーメント

P_y, P_z　：棒軸線に作用する変位前のy, z方向の分布外力

$\bar{V}$, $\bar{H}$, $\bar{M}$：要素両端の接点外力であり、変位前のy, z方向外力とモーメント外力

$$n_z = \begin{cases} -1\ (z = z_1) \\ 1\ (z = z_2) \end{cases}$$

であり、$(\ )^{(0)}$, $\Delta(\ )$の意味はこれまでと同様である。また部材力$N^{(0)}$や$M^{(0)}$は部材端力と変位が既知であるから要素中間点の値はつり合いにより求められる。この仮想仕事式に式（8）～（12）を代入すると有限要素の剛性方程式が求まる。これから骨組全体の剛性方程式を作成する方法は微小変位問題における場合と同じである。すなわち剛体変位除去の手法でとられるような変位後の座標への座標変換は不要である。何故なら物体固定座標であるから変位後においても節点の座標値は変わらないからである。



図－2　エラスティカの計算例

5. あとがき

本報告の計算手法の特色は少ない有限要素で大変位問題を扱えることである。そこでエラスティカの問題を1つの有限要素で計算した結果を図－2に示す。計算はH≒0.5Hcr～1.6Hcr間を100の等増分ステップで計算したが、先端のたわみや固定端の曲げモーメントは座屈荷重の近傍を除き、正解に対し2～3％の誤差である。

また、この方法は剛体変位除去の手法では表現できない、ねじりを伴う有限変位問題により有効と考えられる。それは、この方法によれば増分段階が増すにつれ、座標はだんだんと捩れていくのが表現できるからである。