

I-55

有限ひずみ仮想仕事の原理による骨組構造解析

熊本大学 工学部 正 員 三池 亮次
 熊本大学 工学部 正 員 小林 一郎
 熊本大学 工学部 学生員 ○伊東 貢
 センチュリー リサーチ センター(株) 姫野 健司

1. はじめに 有限変位構造解析に通常用いられるひずみエネルギーはGreenひずみ E_g とKirchhoff擬応力 T_K が対となったものである。応力としてKirchhoff 応力でなく物理的応力を用いる場合の有限変位仮想仕事の原理の基礎式は、先に誘導し、せん断ひずみが微小のときは、直応力にかかるひずみの中に回転角 θ を含む項が現われることを示した¹⁾。座屈や飛移の解析におけるように、わずかな応力の増分に対して変位の増分の著しい解析において、 θ を考慮するような割線弾性係数をもつ基礎式の展開が望ましい。本法はまた、有限変位骨組部材の有限変位後の中心線を3次曲線で近似し、部材平衡マトリックスを用い部材内部応力とひずみを、部材端力で表すが、この手法は従来の変位法による有限変位構造解析と異なっている。なお、せん断ひずみが有限で無視できない場合の、せん断応力と対をなす有限ひずみは複雑な形となることについても、さきに報告した通りである²⁾。

2. 理論 物体内部の任意点に物体力 f が、境界において表面力 p が作用して、変形の中間状態の位置ベクトル $x=\{x_i\}$ から有限の変位 Δu を生じ釣り合い状態にあるものとする。外力 f と p とが、有限変位 Δu に対してなす仮想仕事の積分 $\Delta W'$ は、 T_K が一種のひずみテンソル ΔE_k に対してなす仮想仕事に等く

$$\Delta W' = \int_A p \cdot \Delta u dA + \int_V f \cdot \Delta u dV = \int_V \text{trace} \{ T_K^T E_K \} dV' \equiv \Delta U' \quad (1)$$

ここに、 dA, dV は変形後の、 dA', dV' は中間状態における面積要素、体積要素である。上式で ΔE_k は変位が比較的微小のとき、Greenひずみ ΔE_g に一致する。応力として、上式の T_K の代わりに物理的応力マトリックス $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}$ を用いる場合には、それに対応する有限ひずみは複雑なものとなる。

2次元固体で、せん断ひずみが微小の場合、物理的応力のなす仮想仕事は、近似的に単位面積当たり

$$\Delta U = \sigma_{11} \frac{\delta A_1}{\delta A_1'} \left\{ \frac{\partial \Delta u_{e1}}{\partial x_1'} + (1 - \cos \Delta \theta_1) \right\} + \sigma_{22} \frac{\delta A_2}{\delta A_2'} \left\{ \frac{\partial \Delta u_{e2}}{\partial x_2'} + (1 - \cos \Delta \theta_2) \right\} + \sigma_{12} \frac{\delta A_1}{\delta A_1'} \Delta \gamma \left(1 + \frac{\partial \Delta u_{e1}}{\partial x_1'} + \frac{\partial \Delta u_{e2}}{\partial x_2'} \right) \quad (2)$$

となる。ここに、 σ_{11}, σ_{22} は直応力、 σ_{12} はせん断応力、 $\partial \Delta u_{e1} / \partial x_1', \partial \Delta u_{e2} / \partial x_2'$ は直ひずみ、 $\Delta \gamma$ はせん断ひずみである。長さが L の骨組部材の変形後における軸力 $N + \Delta N$ 、曲げモーメント $M + \Delta M$ 、せん断力 $Q + \Delta Q$ のなす仮想仕事は式(2)より

$$\Delta U' = \int_0^L \left\{ \left(\Delta e_m + (1 - \cos \Delta \theta_1) \right) (N + \Delta N) + \Delta \phi' (M + \Delta M) + \Delta \gamma (1 + \Delta e_m) (Q + \Delta Q) \right\} d\delta \quad (3)$$

である。軸力 $N + \Delta N$ には、直ひずみ $\Delta e_m = \partial u_{e1} / \partial x_1'$ 以外に $\Delta e_\theta = (1 - \cos \Delta \theta_1)$ の補正項が、せん断力 $Q + \Delta Q$ に対してせん断ひずみ $\Delta \gamma$ に補正係数がかかる。 $\Delta \theta_1$ は部材軸の廻転角、 $\Delta \phi'$ は曲げモーメントによる部材断面の廻転角である。

せん断力が作用しないトラス構造、またはせん断ひずみが微小で、 $\Delta \gamma$ が無視される場合には、単に補正項として $1 - \cos \Delta \theta_1$ のみを考慮すれば、通常の方法に準じた骨組構造解析が可能である。部材軸の廻転が有限の場合には $1 - \cos \Delta \theta_1$ を上記の補正項として用いるときには、特にトラス構造の有限変形解析に威力を発揮する。

3. 適用計算例

(1) モデル1（2部材トラス）³⁾

最初に、図1のような長さ L の2部材（ミーゼス）トラスの節点2に荷重 P が作用する場合の飛移解析例を示す。 E はヤング率、 A は断面積、 D は節点2の鉛直変位（CM）である。図2に示すように補正項 Δe_0 を考慮する場合、力のつり合いから導かれる正解を与える直接法に完全に一致する。図2は補正項 Δe_0 の考慮の有無による荷重変位曲線を比較したものであり、縦軸は P/EA 、横軸は変位 D である。この図は Δe_0 を用いることの有用性を示している。

図1で節点2がピン結合および剛結合された2部材トラスにおいて、曲げ変形を考慮する場合においても、軸力に対して Δe_m を考慮することによって有限変位解析が可能となる。この場合、変形後の部材の曲線を3次曲線で近似すれば、1部材を4個の小部材に分割した合計8小部材のみの解析で十分の精度の有限変形解析が可能である。

(2) モデル2（2層トラスドーム）

図3に示す2層トラスドームの頂点（節点1）の変位を制御した時に変位制御点以外の点について、荷重がゼロになるように、収束させた場合の数値計算例を示す。図4は節点1における荷重と鉛直変位の関係を表している。この図で $A-A'$ 、 $B-B'$ 、 $C-C'$ においては勾配が不連続になっているが、これは変位を制御していない点において飛移現象が起こっていることを示す。図5は節点1の荷重と節点4の鉛直変位の関係を表している。これによると節点4の鉛直変位は A' 、 B' の時には変位の増分が負になり、 C' の時に飛移現象を起こしていることが分かる。 A' 、 B' の時に変位の増分が負になるのは他の点で飛移現象が起こっているために、反動で持ち上げられた状態になっている。図6は実際の構造物の有限変形の過程を三次元座標で斜め上から眺めた図である。Oは変形前の状態である。 A' 、 B' 、 C' はそれぞれ節点3、2および4が飛移した後の状態を表している。

参考文献

- 1) 三池、小林：一有限びずみ仮想仕事の原理による構造解析、40回年次学術講演会、1985.2)
- 2) 三池、小林、久木田：有限変位仮想仕事の原理による骨組構造解析、39回年次学術講演会、1984.3)
- 3) 福本：新体系土木工学9 構造物の座屈・安定解析、技報堂出版、1982.

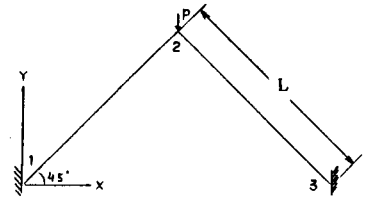


図1 モデル1

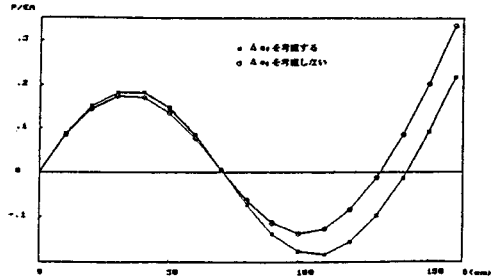


図2 モデル1の荷重-鉛直変位曲線

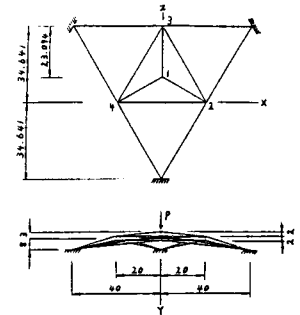


図3 モデル2の骨組形状(単位:CM)

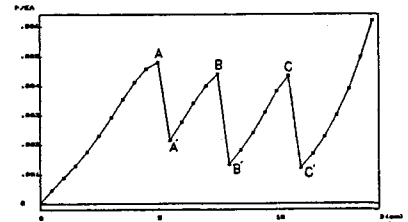


図4 モデル2の
荷重-鉛直変位(節点1)曲線

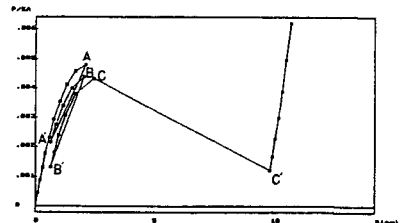


図5 モデル2の
荷重-鉛直変位(節点4)曲線

