I-54　立体骨組における有限回転の近似的な取り扱いに関する考察

東京電力（株）　正会員　酒井 達史
東北大学　正会員　岩熊 哲夫
東北大学　正会員　倉西 茂

1. まえがき

立体骨組構造物の有限変位理論の離散化手法として、有限要素法がよく用いられるが、その1つとして『剛体変位除去』と呼ばれる方法がある。この方法は、物体の変位は剛体的な回転と真の変形との重ね合わせであるという幾何学的考察に基づいており、対象とする問題の変位の大きさに制限がないため、有限変位問題の数値解析上かなり有利なものである。しかし、3次元空間での有限回転は、微小変位理論において扱っているように線形ベクトル空間上になく、その回転角成分を適切に定義する必要がある。

2. 数値解析法の定式化

（a）3次元空間の有限回転

空間に固定した直交直線座標系まわりの有限な回転角は存在しないが、有限要素法を用いて立体骨組を解析する場合には、微小変位理論で用いられている3つの軸まわりの回転角成分を形式的に用いた方が、常に同じ座標系を基準としているために、たいへん扱いやすい。またこの空間に固定された基準となる座標に関する回転角を用いないと、有限変位理論の場合でも厳密な剛性方程式は得られない。存在しないこの有限回転成分でも、その増分量や微小量としては存在し、また、仮想仕事式において3つの軸まわりのモーメント外力と仕事をする回転角としても表わせる。それらは、Euler角で表わした有限回転角 α, γ, ϕ と次式のような関係にある。

$$\begin{Bmatrix} \delta\theta_x \\ \delta\theta_y \\ \delta\theta_z \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} -\cos\gamma\cdot\delta\alpha + \sin\gamma\cdot\cos\alpha\cdot\delta\phi \\ \delta\gamma + \sin\alpha\cdot\delta\phi \\ \sin\gamma\cdot\delta\alpha + \cos\gamma\cdot\cos\alpha\cdot\delta\phi \end{Bmatrix}$$

（b）剛性方程式

有限変位の剛性方程式を定式化するために、まず要素局所座標系での節点力ベクトルと要素の真の変形を表わす相対変位ベクトルを、微小変位理論に基づいた剛性マトリックス $\underset{\sim}{K}$ で関係づける。そしてそれを全体座標系に変換すると、剛性方程式は、全体系の節点力ベクトル $\underset{\sim}{d}$ の高次非線形の形で、

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{d})\cdot\underset{\sim}{K}\cdot\underset{\sim}{T}^{T}(\underset{\sim}{d})\cdot \underset{\sim}{d\ell}(\underset{\sim}{d})$$

と表わされる。ここに、$\underset{\sim}{F}$，$\underset{\sim}{d\ell}(\underset{\sim}{d})$ はそれぞれ全体系の節点力ベクトル，節点相対変位ベクトルであり、$\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{d})$は有限回転角成分をEuler角で表わした座標変換マトリックスである。この剛性方程式をNewton-Raphson法を用いて解くために、全体系の変位増分 $\Delta\underset{\sim}{d}$ と荷重増分 $\Delta\underset{\sim}{F}$ の線形化された増分式を求め、これを用いる。

$$\begin{aligned}\Delta\underset{\sim}{F} &= \Delta\underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{K}\cdot\underset{\sim}{T}^{T}\cdot\underset{\sim}{d\ell} + \underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{K}\cdot\Delta\underset{\sim}{T}^{T}\cdot\underset{\sim}{d\ell} + \underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{K}\cdot\underset{\sim}{T}^{T}\Delta\underset{\sim}{d\ell} \\ &= \underset{\sim}{K_t}\cdot\Delta\underset{\sim}{d}\end{aligned}$$

3. 数値解析例（横倒れ座屈）

（a）横倒れ座屈前の面内たわみの影響

解析には道路橋示方書の規定にのっとった標準的なI型断面部材を用いた。

Fig.1 は座屈モーメントの数値解と既存公式との比較を行なったものである。Timoshenkoは座屈前のたわみの影響を無視し、TrahairやNishinoはある程度考慮して求めたものであるのに対し、数値解はなんら制限を設けておらず、その影響を厳密に考慮しているため、わずかではあるが、一番高い座屈モーメントを示している。

Fig.2 は座屈モーメントに及ぼす面内たわみの影響を調べる目的で、モーメントの作用する強軸まわりの曲げ

剛性のみを変化させた仮想断面について同様の解析を行なったものである。曲げ剛性が小さくなるほど座屈前のたわみが大きくなり、その影響で座屈モーメントが大きくなっている。

(b) Channel 材との横倒れ座屈挙動の比較

Channel 材は面内挙動に関して I 型と等価になるように断面積と強軸まわりの曲げ剛性がそれぞれ等しくなるように断面を決定した。

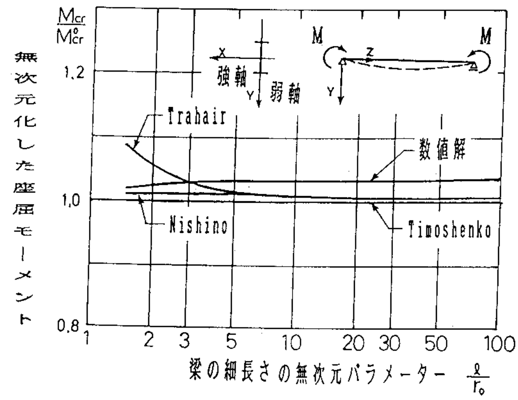
Fig.3 はせん断中心載荷の場合の両者の挙動を、端部境界条件を変えて示したものである。ともに似た挙動を示しているが、わずかに Channel 材の方が高い強度を示している。また端部でのそり拘束によって座屈モーメントが2倍近く大きくなっている。

Fig.4 は Channel 材について載荷点を変化させた場合の挙動である。載荷点がせん断中心から遠くなるほど、作用モーメントが小さいうちからの横たわみが顕著となっており、強度が低下している。

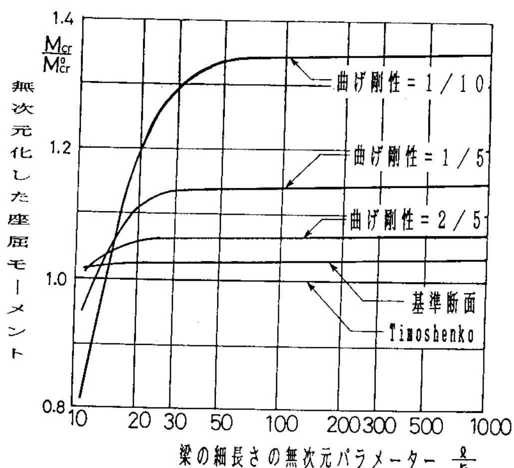
4. あとがき

棒部材の変位を剛体的な大変位と微小要素の真の微小変形の重ね合わせであると考え、有限回転成分を適切に定義することによって、立体骨組の大変位をも厳密に追跡できる剛性方程式を求め、数値解析を行った。

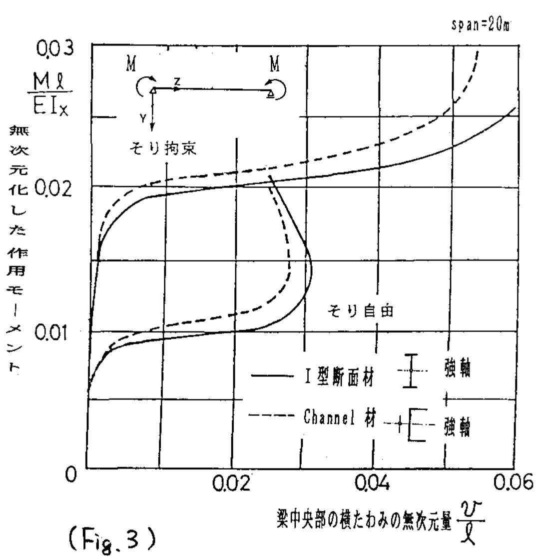
その結果、既存公式よりも座屈前のたわみの影響を忠実に考慮した横倒れ座屈モーメントを求めることができた。また、Channel 材の強度の確認をも行なった。



(Fig.1) 座屈モーメントの既存公式との比較

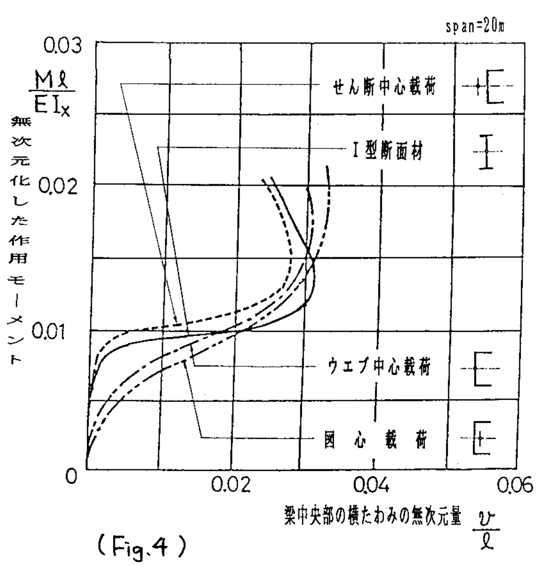


(Fig.2) 仮想断面における座屈モーメントの変化



(Fig.3)

I 型と Channel 材の横倒れ挙動比較



(Fig.4)

Channel 材の載荷点の違いによる挙動の比較