I－51

有限変位離散化系の整合性と解の収束に関する一考察

法政大学　正員　○阿井正博
東京大学　正員　西野文雄

１．はじめに.-　有限変位問題の離散化において、要素の全自由度をその剛体位置と変形の自由度に分解する手順の合理性は既に認知されているが、ここでは、その変分問題の定式化としての離散化基礎式の整合性と解の収束性について、ひずみエネルギーの再現性より考察する。

２．離散化の適合条件.-　２組に分けられた Lagrange座標 $\{\xi^1,\xi^2,\xi^3\}=\{(\zeta^i, i=1,\ldots,I),(s^j, j=1,\ldots,j)\}$ の内、片方の$\{\zeta^i\}$上の有限個の未知関数 $\{\chi^k(\zeta^i), k=1,\ldots,K\}$ により空間形状が表現されるような連続弾性系があり、そのすべての非線形基礎式が既知であるとする。物体内での $\{\zeta^i\}$ の領域を L、各$\{\zeta^i\}$での$\{s^j\}$の領域を $C(\zeta^i)$ と表す。このとき、運動場の拘束のもとに$\{\zeta^i\}$での領域$C(\zeta^i)$上のすべての物質点の空間位置を規定するパラメータの組 $\mathbf{X}(\zeta^i)$（点$\{\zeta^i\}$の空間位置）を一般に考えることができるが、同時に$C(\zeta^i)$の空間形状は関数$\{\chi^k(\zeta^i)\}$の$\{\zeta^i\}$での値と微係数でも決定され式(1)のように関係づけられる。ただし、$\mathbf{D}_X$は$\{\zeta^i\}$上での非線形微分作用素を表す。

$$\mathbf{X}(\zeta^i) = \mathbf{D}_X\{\chi^k(\zeta^i)\} \quad \ldots\ldots(1)$$

以上の連続系の次のような離散化を考える。分割数 M に対して領域Lでの要素分割が一意的に定まり、M→∞で各要素の$\{\zeta^i\}$上での次元が零に収束するような分割手順が既知であるものとする。要素(e)の大きさを式(2)で定義し、全体領域を$L=\sum_{e=1}^{M}L_{(e)}$と表す（$L_{(e)}$は要素(e)の大きさと$\{\zeta^i\}$の領域の両方を表す）。

$$L_{(e)}\ (=\int_{(e)}dL) = \int\ldots\int_{(e)}d\zeta^1\ldots d\zeta^I \quad \ldots\ldots(2)$$

M-分割での節点数を N とし、その式(1)による空間位置を $\{\mathbf{X}_N\}=\{\mathbf{X}_n, n=1,\ldots,N\}$（節点位置）と表し、各要素(e)上にある節点の$\mathbf{X}_n$の組を $\{\mathbf{X}\}_{(e)}$と表して要素位置と呼ぶものとする。さらに、$\{\mathbf{X}\}_{(e)}$は、式(3.a,b)のように要素の剛体位置と変形を規定する２つのパラメータの組（$\mathbf{v}_{(e)}, \boldsymbol{\epsilon}_{(e)}$）に分解することができるが、$\boldsymbol{\epsilon}_{(e)}$に対して１対１対応の要素内変形状態の補間(ここにのみ選択性を含む)を決定した後、$\mathbf{v}_{(e)}$に応じた剛体変位を考えることにより、離散系としての空間形状が定まる。このとき、$\{\chi^k(\zeta^i)\}$-$\{\mathbf{X}_N\}$間および補間に関係するすべての適合条件は、小なくとも M→∞の極限で満足されているものとする。

$$\mathbf{v}_{(e)}=\Gamma_v(\{\mathbf{X}\}_{(e)}),\quad \boldsymbol{\epsilon}_{(e)}=\Gamma_\epsilon(\{\mathbf{X}\}_{(e)}) \quad \ldots\ldots(3.a,b)$$

３．力学関係と収束条件.-　要素(e)の節点に作用する力を次の２通りに成分表示する。要素力 $\{\mathbf{F}\}_{(e)}$を、(e)に作用する力の$\{\mathbf{X}\}_{(e)}$に対する共役成分として、すなわち任意の$\{\mathbf{X}\}_{(e)}$からの変分$\delta\{\mathbf{X}\}_{(e)}$に対して内積$\delta V_{(e)}=\{\mathbf{F}\}_{(e)}^T\delta\{\mathbf{X}\}_{(e)}$が作用力の実微少外力仕事を表現するように定義する。また、同様に考えて、要素作用力の$\boldsymbol{\epsilon}_{(e)}$に対する共役成分である変形力 $\mathbf{f}_{(e)}$を内積$\delta U_{(e)}=\mathbf{f}_{(e)}^T\delta\boldsymbol{\epsilon}_{(e)}$が実微少内力仕事を表すよう定義するものとする。

$\mathbf{f}_{(e)}$と$\boldsymbol{\epsilon}_{(e)}$の関係は、要素のいわゆる構成関係であり、$\boldsymbol{\epsilon}_{(e)}$に対する前述要素補間形状でのひずみエネルギー $\tilde U_{(e)}(\boldsymbol{\epsilon})$が評価できるものとすれば、$\mathbf{f}_{(e)}=(\partial\tilde U/\partial\boldsymbol{\epsilon})_{(e)}^T$ として表される（また、形状補間とは別に、関数$\tilde U_{(e)}(\boldsymbol{\epsilon})$を直接与えても弾性要素を想定することができる）。次に、要素力$\{\mathbf{F}\}_{(e)}$は、変形力$\mathbf{f}_{(e)}$に対して、変形$\boldsymbol{\epsilon}_{(e)}$の上での要素の剛体的つり合い条件（:$[Q'_{F(e)}(\boldsymbol{\epsilon})]$）と剛体位置$\mathbf{v}_{(e)}$に関係した回転変換（:$[T_{F(e)}(\mathbf{v})]$）により式(4.a,b)のように表わされる。

$$\{\mathbf{F}\}_{(e)}=[Q_{F(e)}(\{\mathbf{X}\})]\mathbf{f}_{(e)},\qquad [Q_{F(e)}]=[T_{F(e)}(\mathbf{v})][Q'_{F(e)}(\boldsymbol{\epsilon})] \quad \ldots\ldots(4.a,b)$$

このとき、この$\{\mathbf{F}\}_{(e)}$-$\mathbf{f}_{(e)}$関係と式(3.b)の$\boldsymbol{\epsilon}_{(e)}$-$\{\mathbf{X}\}_{(e)}$関係は独立ではなく、仮想仕事の原理 $\{\mathbf{F}\}_{(e)}^T\delta\{\mathbf{X}\}_{(e)}=\mathbf{f}_{(e)}^T\delta\boldsymbol{\epsilon}_{(e)}$のもとに式(5)の反傾関係にあることがわかる。

$$[\partial\boldsymbol{\epsilon}/\partial\{\mathbf{X}\}]_{(e)}\ (=[Q_{X(e)}(\{\mathbf{X}\})]) = [Q_{F(e)}(\{\mathbf{X}\})]^T \quad \ldots\ldots(5)$$

以上において、各要素で式(5)の反傾関係が成立することと どのような関数であれひずみエネルギー $\tilde U_{(e)}(\boldsymbol{\epsilon})$が存在することが、(弾性性状は元の連続系とは異なるかもしれないが)１つの弾性要素集合体の数学系として完備であり変分問題として成立することを保証する。

任意の形状$\{\chi^k(\zeta^i)\}$にある連続弾性系の全ひずみエネルギー $U(\{\chi^k\})$ を単純にM-分割したときの各要素領域の厳密なひずみエネルギーを$U_{(e)}$, e=1,..,M,と表す（$\tilde U_{(e)}$は、式(1)による$\{\chi^k(\zeta^i)\}$に対する節点位置$\{\mathbf{X}_N\}$で定まる離散系各要素のひずみエネルギー）。このとき、M→∞（$L_{(e)}\to0$）の極限において、両方の要素ひずみエネルギーは零となるが、式(2)の$L_{(e)}$を用いて、$U_{(e)}$に対する$\tilde U_{(e)}$の近似が式(6)を満たす程度に達成されているものとすれば、２つの全ひずみエネルギーの差は式(7)のように展開することができ、$\sum_{e=1}^{M}\theta^M_{(e)}=1$（ただし、$\theta^M_{(e)}=L_{(e)}/L$）の関係を考えれば、式(6)により$\sum_{e=1}^{M}\tilde U_{(e)}\to U(\{\chi^k\})$（M→∞）の収束がいえる。このとき、$\{\chi^k(\zeta^i)\}$で定まる変形(ひずみ)が滑らかであれば、連続系の各要素領域が M→∞ で相対的に定ひずみ状態になることは明らかであり、連続系の考える各要素領域での任意の定ひずみ状態に対して要素の補間が式(6)の条件を満足すれば前述の収

$$\lim_{L_{(e)}\to0}(\tilde U_{(e)}-U_{(e)})/L_{(e)}=0 \quad \ldots\ldots(6)$$

$$\left|\lim_{M\to\infty}\sum_{e=1}^{M}\tilde U_{(e)}-U(\{\chi^k\})\right| \le \lim_{M\to\infty}\sum_{e=1}^{M}\left|\tilde U_{(e)}-U_{(e)}\right| = L\cdot\lim_{M\to\infty}\sum_{e=1}^{M}(|\tilde U-U|/L)_{(e)}\theta^M_{(e)} \quad \ldots\ldots(7)$$

束に対して十分といえる。　$\tilde{U}_{(e)}(\boldsymbol{\epsilon}) = EI\kappa^{\circ}(\phi_A-\phi_B) + EAl/2\cdot\varepsilon^2 + 2EI/l\cdot(\phi_A{}^2+\phi_B{}^2+\phi_A\phi_B)$....(8)

このことは、また、各離散要素が、少なくとも $L_{(e)}\to 0$ で、$\boldsymbol{\epsilon}_{(e)}$の値を適切に選ぶことにより任意の定ひずみ状態を表現しうることで十分といえる。さらに、線形化された$\mathbf{f}_{(e)}$-$\boldsymbol{\epsilon}_{(e)}$関係でのひずみエネルギー関数 $\tilde{U}_{(e)}{}^{L}(\boldsymbol{\epsilon})$ を定ひずみの枠内で条件(6)に適用すれば、極限分割でのその線形化の可否を判断することができる。例えば、文献[1]の有限変位有限ひずみ平面曲げ理論の離散化では、式(8)のひずみエネルギー関数で定まる微少変位理論のそれと全く同じ変形力-変形関係により収束が得られることが確かめられる[2]。ただし、E,A,I,lおよびκ°はそれぞれ弾性定数,断面積,断面２次モーメント,初期長さおよび初期曲率を表しており、$\{\varepsilon,\phi_A,\phi_B\}$は Fig.1 に示す変形$\boldsymbol{\epsilon}_{(e)}$のパラメータである。

４．$\{\mathbf{F}\}_{(e)}$-$\mathbf{f}_{(e)}$関係での$\boldsymbol{\epsilon}_{(e)}$の効果.-　いわゆる有限変位微少ひずみ問題において正規化された要素変形が分割領域 $L_{(e)}\to 0$ で十分小さくなるとき、式(4.a,b)における $[T_{F(e)}(\mathbf{v})]$ は剛体変位により大きく変化するが、$[Q'_{F(e)}(\boldsymbol{\epsilon})]$ の変化は小さい。したがって、$\boldsymbol{\epsilon}_{(e)}=\mathbf{O}$での $[Q'_{F(e)}{}^*]=[Q'_{F(e)}(\mathbf{O})]$ を常に用いて、要素力を式(9.a,b)のように表しても厳密な$\{\mathbf{F}\}_{(e)}$との数値的差異は小さく、密な要素分割での離散化の近似表現として合理的にみえる。しかし、例えば、$\{\mathbf{F}\}_{(e)}$を諸関係式と共に$\{\mathbf{X}\}_{(e)}$に関して微分して得られる剛性マトリックスを考えると、$\{\mathbf{F}\}^*_{(e)}$に対する同様の展開では微少変形の条件では解消されない幾何剛性の非対称を生じる。これは、式(5)の反傾関係が成立していないことに起因しており、$\{\mathbf{F}\}^*_{(e)}$のする仕事が変位経路に依存することを意味する。

$$\{\mathbf{F}\}^*_{(e)} = [Q_{F(e)}{}^*(\{\mathbf{v}\})]\mathbf{f}_{(e)},$$

$$[Q_{F(e)}{}^*] = [T_{F(e)}(\mathbf{v})][Q'_{F(e)}{}^*] \quad \text{....(9.a,b)}$$

弾性の変形問題は系のエネルギーに関する停留問題であり、要素位置$\{\mathbf{X}\}_{(e)}$の共通の変化に対して $\{\mathbf{F}\}^*_{(e)}$と$\{\mathbf{F}\}_{(e)}$のなす仕事の差に注目することは一つの客観的な比較である。簡単のために、平面曲げ要素を考える。微少ひずみの範囲で任意の有限変位を生じている平面骨組の中で代表要素(e)(初期長さ l)に注目し、式(1)によるその要素位置を $\{\mathbf{X}\}_{(e)}=\{(x,y,\theta)_A,(x,y,\theta)_B\}$、対応する剛体位置と変形を $\mathbf{v}_{(e)}=\{x_A,y_B,\tau\}$, $\boldsymbol{\epsilon}_{(e)}=\{\varepsilon,\phi_A,\phi_B\}$ とする (Fig.1) 。この要素を基準位置 ($\mathbf{v}_{(e)}=\mathbf{O},\boldsymbol{\epsilon}_{(e)}=\mathbf{O}$) より、最初に 剛体変位を拘束 ($\mathbf{v}_{(e)}=\mathbf{O}$) した上で$\boldsymbol{\epsilon}_{(e)}$に変形させ、その後 $\mathbf{v}_{(e)}$に応じた剛体変位をさせて $\{\mathbf{O}\}\to\{\mathbf{X}\}_{(e)}$に到る経路を考える。このとき、厳密な$\{\mathbf{F}\}_{(e)}$のする仕事 $\tilde{V}_{(e)}$は、剛体変位経路上で零であり、最初の変形経路上のひずみエネルギー$\tilde{U}_{(e)}$だけの仕事をする ($\tilde{V}_{(e)}=\tilde{U}_{(e)}$) 。次に、式(10)の $\{\mathbf{F}\}^*_{(e)}$は、変形経路上で同じく$\tilde{U}_{(e)}$の仕事をするが、その剛体としての不つり合いにより前述の剛体変位の上で $-\varepsilon\tau(M_A+M_B)$だけの仕事をし、その和は $V^*_{(e)}=\tilde{U}_{(e)}-\varepsilon\tau(M_A+M_B)$ となる。ただし、M_A,M_Bは要素両端のϕ方向のモーメント。この $V^*_{(e)}$ の長さ l に対する密度を極限 $l\to 0$で考えると、例えば式(8)の$\tilde{U}_{(e)}$を代入して展開することにより式(10)の結果が得られる[2]。ここに、N,M,Q,e_G,κおよびθは、それぞれ、連続系での注目する極限区間での軸力、曲げモーメント、せん断力、軸線伸び率、曲率およびたわみ角を意味する。また、下線___を付した $\tilde{U}_{(e)}/l$ の項は式(8)の$\tilde{U}_{(e)}$に限らず式(6)を満たす任意の$\tilde{U}_{(e)}$での収束値である。式(10)で、NとQは同程度の大きさでありθが任意の大きさであることより、$\{\mathbf{F}\}^*_{(e)}$への置換による下線 _ _ _ を付した付加的な仕事は、少なくとも第１項の伸びによるそれと同等である。**一般の離散化要素において、剛体的に完全につり合っている$\{\mathbf{F}\}_{(e)}$が微少な変形に対してする仕事は、その変形の無視により $\{\mathbf{F}\}^*_{(e)}$に含まれる不つり合いが大きい剛体変位に対してなす仕事と同程度であるといえる。**

$$\lim_{l\to 0} V^*_{(e)}/l = \underline{Ne_G/2 + M(-\kappa/2+\kappa^{\circ})} + \underline{Qe_G\theta(1+e_G)} \quad \text{....(10)}$$

５．まとめ.-　すべての適合条件を満足する離散系では、対応する連続系の分割領域毎の任意の定ひずみ状態に対して各離散化要素の補間が対応する変形$\boldsymbol{\epsilon}_{(e)}$において条件(6)を満足するとき、離散系の巨視的な弾性特性はM→∞で連続系のそれに収束するといえる。すなわち、同条件下で各要素(e)が極限$L_{(e)}\to 0$で任意の定ひずみ状態を表現しうることで十分である。弾性特性の収束をいうまえに、有限変位離散系が(弾性)要素集合体の力学系として前述の意味で完備であるためには、剛体変位だけではなく微少ひずみの範囲であっても各要素の変形の効果が剛体的つり合い条件の上で考慮されねばならない。

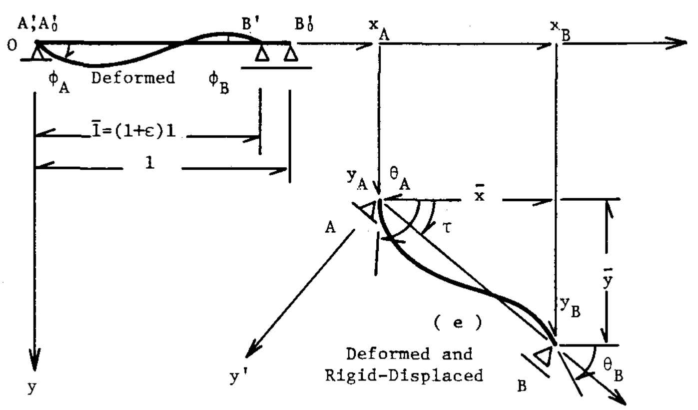

Fig.1 Deformation and Rigid Position

〈文献〉　1) 阿井正博・西野文雄：離散化系の幾何学的非線形問題での力学的関係と平面骨組への適用,土木学会論文報告集,No.304, 1980-12; 2) Ai,M. and F.Nishino: Convergence of Geometrically Nonlinear Discretization at Infinitesimal Element Division, J. of faculty of Engng. (B), Univ. of Tokyo, Vol.38, No.3, pp.59-76, 1986.