I-48　矩形板の非弾性曲げの一解析法

長崎大学　正　員　　崎山　毅
長崎大学　正　員　○松田　浩
長崎大学　学生員　　秋友　隆二

1、まえがき

矩形板の非弾性曲げ問題は、荷重の漸増に伴う、部材断面の塑性域の生成、拡大による剛性変化のために、結局、変厚矩形板の曲げ問題に帰着される。本文は、変厚矩形板の基礎微分方程式について、板の縦横の等分割線の交点における解析的近似解を求め、これに基づく、任意の境界条件および荷重条件をもつ矩形板の曲げの一解法を提示し、種々の境界条件を有する矩形板の非弾性解析を行ない本解法の実用性を検討したものである。

本解析法によると、比較的容易に矩形板の非弾性曲げ解析を行なうことができる。なお、たわみは、板厚を越えない範囲として、幾何学的非線形性の影響は無視する。

2、基礎微分方程式とその解析的近似解

第n荷重増分段階における荷重強度をq、断面力、変形をXp（p=1～8)とすれば、荷重増分Δqが付加された第（n＋1）荷重増分段階における、荷重強度および断面力、変形は、それぞれ（q＋Δq），（Xp＋ΔXp）となる。このとき第n荷重増分段階を基準とした、荷重増分Δqに対する断面力および変形の基礎方程式は、断面力および変形の無次元量を導入して、つぎの連立偏微分方程式として与えられる。なお、式(1)はReissnerの平板曲げ理論において、板厚方向の直応力σzを無視して定式化されたものである。

$$\left.\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial\Delta X_1}{\partial\zeta}+\mu\dfrac{\partial\Delta X_2}{\partial\eta}+\Delta q=0 & \dfrac{\partial\Delta X_3}{\partial\zeta}+\mu\dfrac{\partial\Delta X_5}{\partial\eta}=\mu\Delta X_2 & \dfrac{\partial\Delta X_4}{\partial\zeta}+\mu\dfrac{\partial\Delta X_3}{\partial\eta}=\mu\Delta X_1 & \dfrac{\partial\Delta X_6}{\partial\zeta}+\nu\mu\dfrac{\partial\Delta X_7}{\partial\eta}=I\Delta X_4 \\
\nu\dfrac{\partial\Delta X_6}{\partial\zeta}+\mu\dfrac{\partial\Delta X_7}{\partial\eta}=I\Delta X_5 & \dfrac{\partial\Delta X_7}{\partial\zeta}+\mu\dfrac{\partial\Delta X_6}{\partial\eta}=J\Delta X_3 & \dfrac{\partial\Delta X_8}{\partial\eta}+\Delta X_7=\kappa\Delta X_2 & \dfrac{\partial\Delta X_8}{\partial\zeta}+\mu\Delta X_6=\mu\kappa\Delta X_1
\end{array}\right\}\quad(1)$$

ここに、Qy、Qx：せん断力、Mxy：ねじりモーメント、My、Mx：曲げモーメント、θy、θx：たわみ角、

w：たわみ、E：弾性係数、G：せん断弾性係数、ν：ポアソン比、h：板厚

$(X_1, X_2)=\dfrac{a^2}{D_0(1-\nu^2)}(Q_y, Q_x)$, $(X_3, X_4, X_5)=\dfrac{a}{D_0(1-\nu^2)}(M_{xy}, M_y, M_x)$, $(X_6, X_7)=(\theta_y, \theta_x)$, $X_8=\dfrac{w}{a}$ ，$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$：板剛度,

$x=a\eta$, $y=b\zeta$, a, b：矩形板の横，縦の辺長，q_0：基準荷重強度，h_0：基準板厚，$\mu=b/a$，$\bar{q}=\mu K_1\dfrac{q}{q_0}$, $K_1=\dfrac{q_0a^3}{D_0(1-\nu^2)}$,

$I=\mu(1-\nu^2)\left(\dfrac{h_0}{h}\right)^3$, $J=2\mu(1+\nu)\left(\dfrac{h_0}{h}\right)^3$, $\kappa=\dfrac{1}{10}\dfrac{E}{G}\left(\dfrac{h_0}{a}\right)^2\dfrac{h_0}{h}$, $D_0=\dfrac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}$：基準板剛度,

式(1)を用いて、矩形板の非弾性曲げ解析を行なうことができる。しかしながら、式(1)は、板厚、板剛度を変数係数とする連立偏微分方程式となるため、その解析解を一般的に求めることはほとんど不可能であると考えられる。したがって、本研究においては、矩形板の縦横の等分割線の交点を対象として、これらの離散点における基礎微分方程式の解析的近似解を求めることとする。なお、この解析的近似解を求める方法の詳細については、文献(5)を参照されたい。

式(1)の連立偏微分方程式の任意の離散点(i,j）に関する解析的近似解は次式となる。

$$X_{pij}=\sum_{d=1}^{6}\left(\sum_{f=0}^{i}a_{1pijfd}\cdot X_{rf0}+\sum_{g=0}^{j}a_{2pijgd}\cdot X_{s0g}\right)+q_{pij}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ここに、ΔXrfo、ΔXsogは、いわゆる積分定数であり対辺の境界条件によって決定されるべきものである。また、a_{hpijud} は伝達マトリックス法における伝達マトリックスに相当するものである。

3、材料非線形性

本研究では、断面細分割法を用い、非弾性剛性の算定を行なう。解析上の仮定は、次のとおりである。

(1)材料は、完全弾塑性体である。
(2)部材断面の応力状態が非弾性域に入った後も平面保持の法則が成り立つ。
(3)断面の各要素の降伏は Von Misesの降伏条件式によって決定される。

塑性域のひろがりの影響を各剛性の低下として考慮することにより各非弾性剛性値を得ることができる。各荷重段階での各非弾性剛性値は、次の手順により求められる。

(a) 矩形板の断面を厚さ方向に細分割する。

(b) 前荷重段階での全応力σijに微小増分荷重Δqに対する増分応力$\Delta\sigma ij$を加えた全応力を $\sigma' ij$ は、

$\sigma' ij=\sigma ij+\Delta\sigma ij$ (3)　　で表わせる。

(c) 材料の降伏は、次式で判定を行なう。　$\sigma x^2+\sigma y^2-\sigma x\sigma y+3\tau xy^2 \geqq \sigma o^2$　(4)

ここに、 σo：降伏応力、 $\sigma x=12zMx/h^3$、 $\sigma x=12zMy/h^3$、 $\tau xy=12zMxy/h^3$

(d) 式(4)を満足する場合は、微小要素が塑性したとみなし、微小要素の剛性を零とおき（その微小要素断面を除去する）、満足しない場合には、弾性域として元の剛性をもたせ計算する。

(e) 矩形板の等分割点における断面のすべての微小要素に対して、式(4)を判定し、板剛度の減少率を計算し、微小荷重増分のもとで、以上の計算を繰り返し行なう。

4、数値解析

本解析法による矩形板の非弾性曲げ解析結果の収束性および精度を検討するために、等分布荷重を満載する四辺単純支持正方形板について非弾性曲げ解析を行なった。その結果を文献(3)の差分法による解析結果とともに図－1に示す。同図より、本解析法による矩形板の非弾性解析は、比較的粗い分割数による解析でも十分実用性のある解が得られることがわかる。次に、等分布荷重を満載する四辺固定板、四辺単純支持板、対辺単純支持他対辺固定板、対辺単純支持他対辺自由板について非弾性曲げ解析を行なった。その結果を図-2に示す。さらに、本解析法によると、四つの境界辺の中のいくつかが、部分的に異なる二種以上の支持条件で支持された、いわゆる複合境界をもつ矩形板に関して、比較的容易に、非弾性曲げ解析を行なうことができる。

（参考文献）

(1)太田俊昭著：構造物の非弾性解析（新体系土木工学８）1980年
(2)楠田忠雄：垂直荷重を受ける板の塑性設計について、造船協会論文集、第107号 pp.195-202
(3)A.K. Bhaumik and J.T. Hanley：ELASTO-PLASTIC PLATE ANALYSIS BY FINITE DIFFERENCES, Journal of Structural Division, ASCE, Oct. 1967, pp.279-293
(4)A.H.S. Ang AND L.A. Lopez： DISCRETE MODEL ANALYSIS OF ELASTIC-PLATIC PLATES, Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Feb. 1968, pp.271-293
(5)崎山毅、松田浩：変厚矩形板の曲げの一解析法、土木学会論文報告集、第338号、1983年10月、pp.21-28

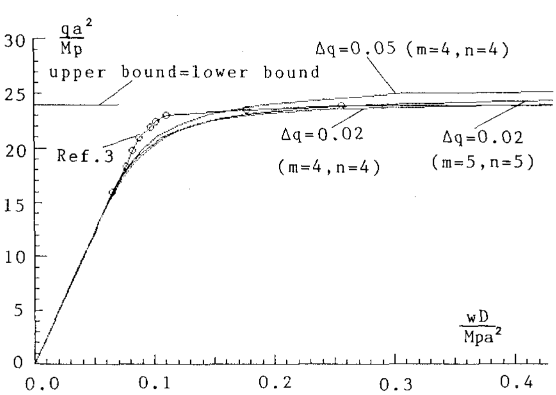

図-1荷重変位曲線（単純支持正方形板）$\nu=0.3$

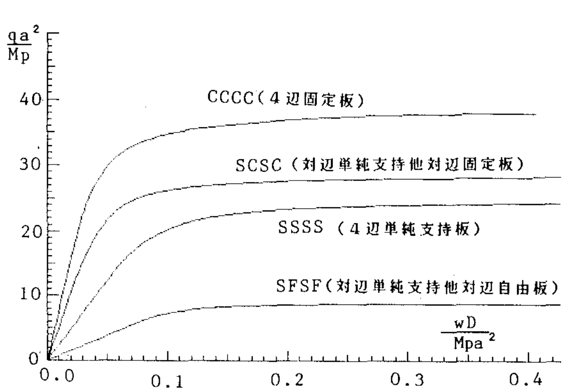

図-２荷重変位曲線（種々の境界条件） $\nu=0.3$