

I-47

曲げとねじりを受ける薄肉断面ばりの弾塑性理論

秋田高専 正会員 ○堀江 保
秋田大学 正会員 薄木 征三
秋田大学 正会員 長谷部 薫

1. まえがき 近年、FEMやFSMなどの計算法の発展により、材料の非弾性と非線形挙動の両方を考慮した耐荷力の計算が可能となった。薄肉ばりの弾塑性解析を行う際、弾性ばりとの大きな相異は、構成方程式がプラントル・ルイスの流れ則に従うことであるが、この構成則を厳密に適用すると弾性ばりのように変位場は容易に定まらないため、弾性ばりの変位場を便宜上採用している場合が多い。

本報告は、上記計算法のように連続体としての解析によらず、はり理論を用いて弾塑性解析を試みたものである。ここでは板厚一定の閉じ断面を対象として、上記流れ則を適用した場合の変位場の決定の仕方を述べ、第一近似、第二近似、さらに高度の変位場が存在することを示し、曲げとねじりを受ける箱形断面の計算例を示す。

2. 仮定と変位場 Fig. 1に座標系を示す。解析の際、ひずみ成分に関し次の仮定を用いた。

- (I) 横断面形不変が成り立つ。
- (II) $n-z$ 面内のせん断ひずみ γ_n は小さいものとして無視する。
- (III) 微小要素の応力のつり合い式において、直応力 σ_z の影響は無視する。

(I) のはり理論の仮定より、微小変位の範囲では次式となる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s - (y - y_s) \phi \\ v &= v_s + (x - x_s) \phi \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 (x_s, y_s) はねじり中心 S の座標であり、 ϕ はねじり角、 u_s, v_s は点 S の x, y 方向変位である。仮定 (II)

より $\gamma_n = 0$ が成り立ち、これより部材軸方向変位 w は、次式のように表される。

$$w = w^* - (x - x_s) u_s' - (y - y_s) v_s' - r_n n \cdot \phi' \quad (2)$$

ここで、 $*$ は薄肉中心線上の値を示し、 $r_n = -m(y - y_s) - l(x - x_s)$ である (ここで l, m は接線 s の方向余弦)。薄肉中心面に平行な面内でのせん断ひずみを γ_s とすると $\gamma_s = \partial w / \partial s + \partial \xi / \partial z$ となり ($\xi = l u + m v$)、これに(2)式を代入し、 $l = \partial x / \partial s$, $m = \partial y / \partial s$ を考慮すると次式となる。

$$\gamma_s = \frac{\partial w^*}{\partial s} + \frac{\partial x^*}{\partial s} u_s' + \frac{\partial y^*}{\partial s} v_s' + (2n + r_s^*) \cdot \phi' \quad (3)$$

上式において、 $r_s^* = m(x - x_s) - l(y - y_s)$ であり、 r_s^* および(2)式中の r_n は Fig. 1 に示す距離を表す。(3)式で $n = 0$ とおくと薄肉中心面内のせん断ひずみ γ_s^* が得られる。

3. つり合いと構成則 薄肉部材の微小要素の応力のつり合い式において、仮定 (III) より直応力 $\sigma = \sigma_z$ の影響を無視すると、 $\tau \cdot t = q(z) = \text{一定}$ となり、せん断流増分一定となる。完全弾塑性材料に対するプラントル・ルイスの構成則は次式である。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\tau} \end{Bmatrix} = \frac{E G}{E \sigma^2 + 9 G \tau^2} \begin{bmatrix} 9 \tau^2 & -3 \sigma \tau \\ -3 \sigma \tau & \sigma^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\gamma}_s \end{Bmatrix} \quad (4)$$

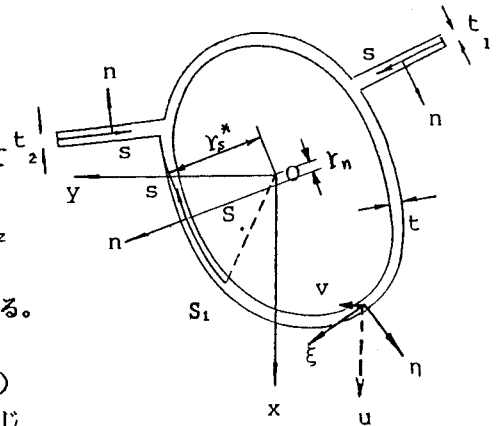


Fig. 1 Coordinate systems

(4)式の第2式において、 $n=0$ （薄肉中心面）とおくと次式を得る。

$$\dot{\gamma}_s^* = \frac{\Omega}{Gt} \dot{q} + \frac{3\tau^*}{\sigma^*} \dot{\epsilon}_z^*$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= 1 + \frac{9G\tau^{*2}}{E\sigma^{*2}} \quad \text{---- plastic portion} \\ \Omega &= 1 \quad \text{---- elastic portion} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

これと、(3)式で $n=0$ とおいたものを等置すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{w}^*}{\partial s} + \frac{\partial x^*}{\partial s} \dot{u}_s^* + \frac{\partial y^*}{\partial s} \dot{v}_s^* + r_s^* \dot{\phi}^* &= \frac{\Omega}{Gt} \dot{q} + \frac{3\tau^*}{\sigma^*} \dot{\epsilon}_z^* \\ &= \frac{\Omega}{Gt} \dot{q} + \frac{3\tau^*}{\sigma^*} \dot{\epsilon}_z^* \end{aligned} \quad (6)$$

問題は、この方程式を満たすよう $w^*(s)$ を決定することであるが、右辺に w^* の関数である $\epsilon_z^* (= \partial w^* / \partial z)$ が含まれており、このままでは解けない。そこで、Fig. 2に示すようなフローチャートにより繰り返し計算を行った。その手順を簡単に説明すると、初めに(6)式の右辺において $\epsilon_z^* = 0$ とおいて第一近似の $w_1^*(s)$ を求める。それを右辺に代入し、同様の手順により第二近似 $w_2^*(s)$ が求まる。この w_2^* より同様の手順の繰り返しにより、さらに高次の変位場を決定することができる。

4. 箱形断面の曲げとねじりの組み合わせ

Fig. 3に示すような2軸対称箱形断面が曲げとねじりを受けた場合を考える。ここでは、 $b_1/b_2=2$ の場合の計算例を示す。解析手順は、HillとSiebelが円管を対象に解いたもの¹⁾と同様である。Fig. 4は、3種類の曲げとねじりモーメントの比 $\alpha = B/T$ に關し、弾塑性境界 c とねじりモーメント T との関係を示したものである。例えば、 $B/T=2$ の場合、無次元化されたねじりモーメントが0.585に達したとき、上下フランジの塑性化が始まり、0.655に達すると全断面塑性化することを示している。Fig. 5は、モーメント比 $B/T=1$ 、境界 $c/b_1=0.4$ の場合のそり w を示している。同図より、第一近似解は第二近似解に比べ、かなり過小評価しているのがわかる。

参考文献

- 1) R. Hill and M.P.L. Siebel; On combined bending and twisting of thin tubes in the plastic range,

Phil. Mag., 42, 722-733 (1951)

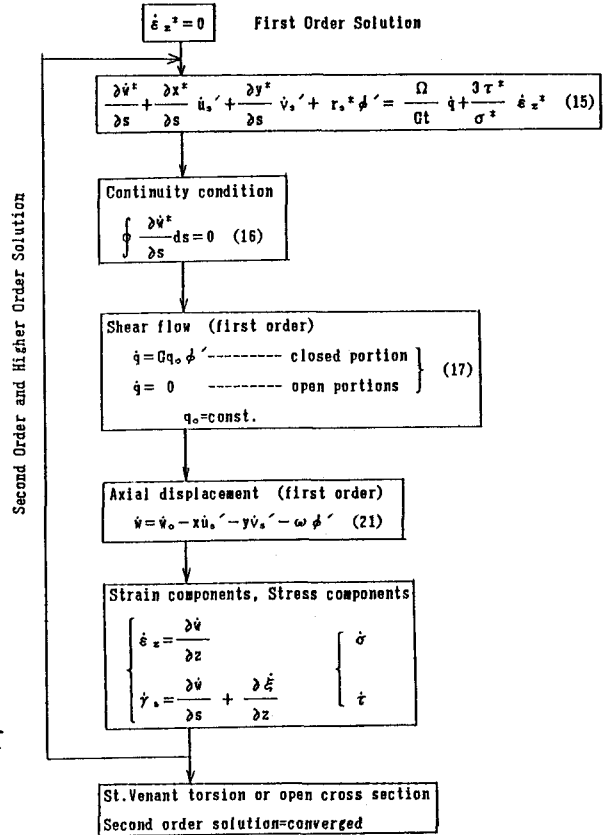


Fig. 2 Iterative approximation for w^*

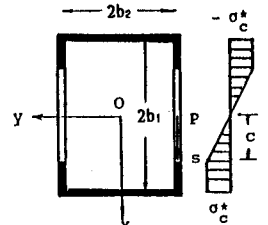


Fig. 3 Box section

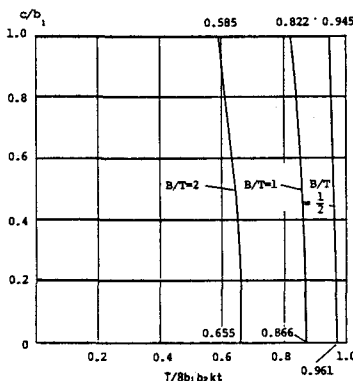


Fig. 4 Boundary c and torsion

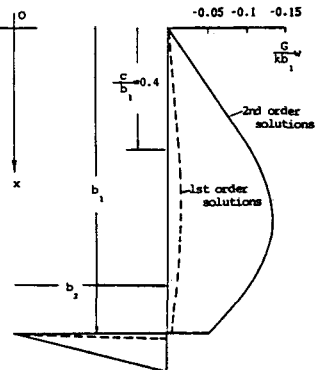


Fig. 5 Warping w at $c/b_1=0.4$