

I-35

円板の非線形曲げ変位の解析法

北海道開発コンサルタント

正員 工藤 浩史

北海道大学工学部

正員 茅村 仁

北海道大学工学部

正員 三上 隆

1. はじめに 板の非線形曲げ変位は、非線形連立微分方程式で記述され、それを厳密に解くことはほとんど不可能に近く、通常は何らかの近似計算手法(差分法・有限要素法等)によらなければならない。本報告は、選点の取り方によっては解の高精度化および未知数の減少などの利点を有する選点法を円板の非線形曲げ変位に適用し、その有効性を確認したものである。さらに、板の非線形曲げ変位の解析法として、その簡便性からしばしば用いられる Berger の方法¹⁾の妥当性について、数値計算を通して検討したものである。

2. 基礎方程式

等分布荷重を受け、等入等出な厚さの円板の微分方程式は次式で与えられる²⁾。

$$\rho^2 \frac{d^2 \psi^*}{d\rho^2} + \rho \frac{d\psi^*}{d\rho} - \psi^* + \frac{1-\nu^2}{2} \rho \left(\frac{dW^*}{d\rho} \right)^2 = 0 \quad (1)$$

$$\rho^2 \frac{d^4 W^*}{d\rho^4} + 2\rho^2 \frac{d^3 W^*}{d\rho^3} - \rho \frac{d^2 W^*}{d\rho^2} + \frac{dW^*}{d\rho} - 12 \left(\frac{\alpha}{h} \right)^2 \rho^2 \left(\frac{d\psi^*}{d\rho} \frac{dW^*}{d\rho} + \psi^* \frac{d^2 W^*}{d\rho^2} \right) = \rho^3 p \quad (2)$$

ただし、 $\rho = r/a$, $W^* = W/a$, $p = qa^3/D$, $\psi^* = (1-\nu)\psi/Eha$ であり、 r = 半径方向座標、 a = 半径、 W = たわみ、 q = 荷重強度、 D = 板剛性、 ν = ポアソン比、 E = 弾性係数、 h = 厚さ。 ψ は半径方向合応力 N_r と周方向合応力 N_θ と次の関係式が成立する応力関数である。

$$N_r = \psi/r, \quad N_\theta = d\psi/dr \quad (3)$$

境界条件(数値例で用いた)は次式で与えられる。

Rigidly clamped (半径方向に動かない周)

$$\rho = 1: W^* = 0, dW^*/d\rho = 0, \rho d\psi^*/d\rho = \nu \psi^* = 0 \quad (4a)$$

Loosely clamped (半径方向に動く周)

$$\rho = 1: W^* = 0, dW^*/d\rho = 0, \psi^* = 0 \quad (4b)$$

板の中央で成立する条件は次式である。

$$\rho = 0: dW^*/d\rho = 0, d^3 W^*/d\rho^3 = 0, \psi^* = 0 \quad (5)$$

3. 定式化

W^* と ψ^* を次式で仮定する。

$$W^* = \sum_{i=1}^{M+1} a_i \rho^{i-1}, \quad \psi^* = \sum_{i=1}^{M+1} b_i \rho^{i-1} \quad (6)$$

ここで、 a_i, b_i は未知係数、 M は内部選点数。

式(6)の $2M+6$ 個の未知係数を定めるための条件式は、微分方程式(1)、(2)の内部選点における残差条件(2M個)および、式(4aまたはb)と式(5)から得る

れる6個の条件で与えられる。その際、式(1)、(2)に現われる導関数を、 $\rho=0, 1$ および内部選点における数値(W^*, ψ^*)で表わし、最終的に解くべき連立方程式は内部選点における数値値を未知量とする形に整理する。得られた連立方程式は非線形なので、次のような手順で逐次近似解を求めていく。(a)第1段階: 式(2)で下線部分を無視して、線形解 W_1^* を求める。(b)第2段階: W_1^* を用い、式(1)から ψ_1^* を決定する。(c)第3段階: 近似解(W_1^*, ψ_1^*)を式(2)の下線部分に用いて、第2近似解 W_2^* を定める。(d)第4段階: W_2^* を用い第2段階の計算を行い、 ψ_2^* の第2近似解 ψ_2^* を求める。以下、上述の手順を所望の精度の解が得られるまで繰り返す。その時次式($\delta = W^*, \psi^*$)を用いて解の収束を速める³⁾。

$$\delta_i = (1-\beta) \delta_{i-1} + \beta \delta_i \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (7)$$

ここで、 β は加速係数。

3. 数値計算例

ポアソン比 $\nu = 0.3$ とし、加速係数 β は種々の荷重強度および支持条件に対する計算結果より判断して、 $\beta = 0.75$ とした。この値で十数回の繰り返し回数で収束解が得られる。以下では、式(4a)、(4b)で与えられる境界条件をそれぞれ、R.C. および L.C. と記す。

(1) 選点の取り方の解に及ぼす影響

表-1は、選点に Legendre 多項式の零点(L選点)と Chebyshev 多項式の零点(C選点)を用い、数種の内部選点数 M による条件 R.C. の板中央のたわみを示したものである。表の右アロックで、上段の値は L 選点、下段のそれは C 選点の結果である。これによると、L 選点の結果は M および荷重強度によらず、一定値を示し、一方 C 選点の結果は、

M が大きくなればし選点の結果と一致するが、 M が小さく、また荷重強度が大きくなれば精度は幾分悪くなる。以下では、し選点、 $M=11$ を用いた。

(2) 他の解法との比較 図-1は、条件R.C.の板中央におけるたわみを、摂動解(第1近似)²⁾と比較したものである。本解析結果と第1近似摂動解は、荷重強度が小さい領域でほぼ完全に一致しているが、荷重強度が大きくなるにつれて、両者の差が大きくなる傾向にある。図には参考のために、第2近似摂動解も併記した。これによると第2近似摂動解は、本解析結果により近いものとなっている。

(3) Berger理論の妥当性の検討 Berger理論¹⁾を周方向に動く条件の板に適用すれば、解の信頼性が失われることは知られている⁴⁾。図-2は、再確認の意味で、2つの境界条件(R.C., L.C.)の場合の板中央のたわみを、本解析法とBergerの方法により計算し比較したものである。図より明らかに、両手法の差は、周方向に動く境界条件および荷重強度が大なる程、著しくなっている。

図-3は図-2の結果を説明するために作成したものである。図はBerger理論に用いられている第1不変量 $\alpha^2 h^2 / 12 = du/dr + u/r + (dw/dr)^2 / 2$ (u =半径方向変位)の値を本解析法で求め、その半径方向の変化を示したものである。これによると、条件R.C.に対しては、 α^2 は荷重強度によらず正值であるが、荷重強度が大きくなれば α^2 の値は一定とはいえない。一方条件L.C.に対しては、荷重強度によらず α^2 は正負の値を示し、Berger理論における仮定が成立しない分布形状となっている。

4. まとめ 円板の非線形曲げ問題の一解析手法として、選点法による解析を試み、その有効性を示した。また提示した手法を用いて、Berger理論の妥当性について検討を行った。

参考文献 1) H.M. Berger, ASME J. Appl. Mech., Vol. 22, pp 465-472, 1955. 2) C.Y. Chia,

Nonlinear Analysis of Plates, McGRAW-HILL, 1980 3) T. Kawai et al., Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 1, No. 1, 1969. 4) J.L. Nowinski et al., Int. J. Mech. Sci., Vol. 14, pp 165-170, 1972.

表-1 選点の取り方の解(w/h)に与える影響

qa^4/Eh^4	$M=6$	$M=7$	$M=8$	$M=11$
5	0.6796 0.6796	0.6796 0.6796	0.6796 0.6796	0.6796 0.6796
10	1.0520 1.0518	1.0520 1.0520	1.0520 1.0520	1.0520 1.0520
20	1.4938 1.4932	1.4938 1.4937	1.4938 1.4938	1.4938 1.4938
30	1.7862 1.7850	1.7862 1.7860	1.7862 1.7862	1.7862 1.7862
40	2.0115 2.0097	2.0115 2.0112	2.0115 2.0115	2.0115 2.0115
50	2.1980 2.1954	2.1980 2.1975	2.1980 2.1979	2.1980 2.1980

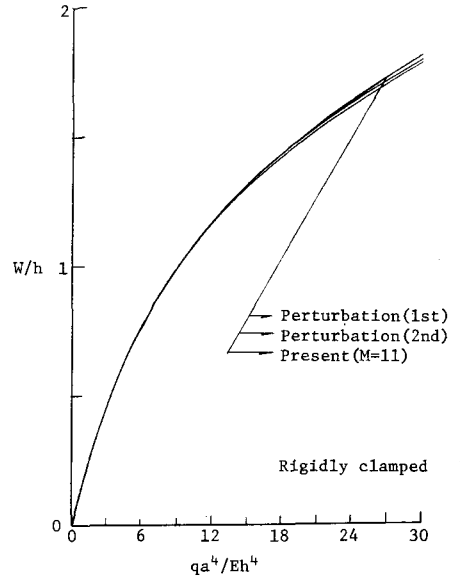


図-1 本解析結果と摂動解の比較

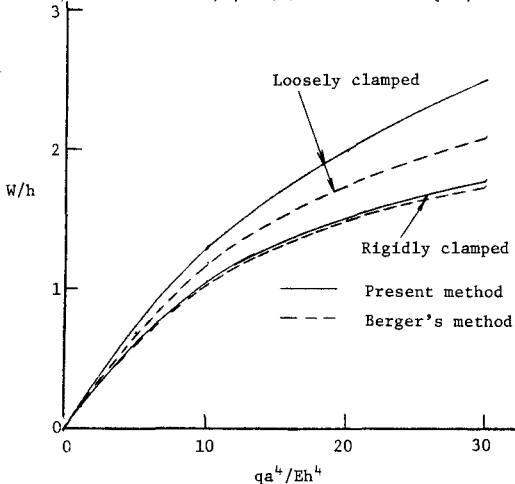


図-2 本解析法とBergerの方法による解の比較

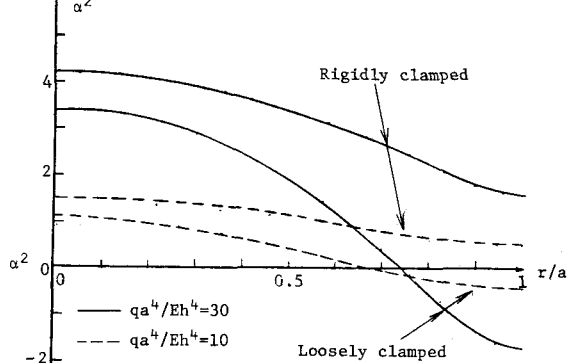


図-3 Berger理論の第1不変量の分布状況