

I-34

扇形有限帯板法による補剛された扇形平板の解析について

建設省土木研究所 正員 ○ 日下部 毅明
 北海道大学工学部 正員 茅村 仁
 同上 正員 荻澤 憲吉
 同上 正員 三上 隆

1. 目的

二円弧辺, 二直線辺でそれぞれ任意の境界条件を有する補剛された曲線鋼床版に対処し得る新しい扇形有限帯板法を提出し, その有効性を示す。

2. 扇形帯板の変位関数

曲線直交異方性板の基本微分方程式は極座標において, たわみを w とすると次に示すようになる¹⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial^3 w}{\partial \rho^3} + \frac{2C}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2 \partial \theta^2} - \frac{2C}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \theta^2} \\ + \frac{2(C^2 + C)}{\rho^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{C^2}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{C^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \\ + \frac{C^2}{\rho^4} w = \frac{P \rho^4}{D_r} \quad \dots (1) \end{aligned}$$

ここで, $\rho = \frac{r}{a}$, $C^2 = D_\theta / D_r$, $P(\rho, \theta)$: 荷重
 D_r, D_θ : r, θ 方向の板剛性

境界条件は

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{単純支持: } w = 0 \\ \quad \quad \quad M_r = 0 \\ \text{固定: } w = 0 \\ \quad \quad \quad \theta = 0 \\ \dots (2) \end{array} \right.$$

(1) 式の解として次の級数を仮定する。

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\rho) T_n(\theta) \quad \dots (3)$$

ここで, $W_n(\rho)$ は (2) の境界条件を満たす。

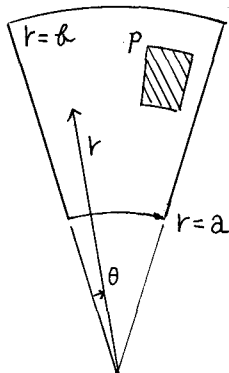


図-1

この条件を満たし, 曲線平板の放射方向の特性を反映し得る解として, $W(\rho)$ には円環板の固有振動関数を用いる事とする。すなわち,

$$W(\rho) = J_0(k\rho) + \alpha Y_0(k\rho) + \beta I_0(k\rho) + \gamma K_0(k\rho) \dots (4)$$

ここで, $J_0(k\rho), Y_0(k\rho)$ はベッセル関数
 $I_0(k\rho), K_0(k\rho)$ は変形ベッセル関数

次に $T(\theta)$ の設定には, (1) 式に Kantrowitch の方法を利用した次式を用いる。

$$\int_1^{\rho^*} L[W(\rho) T(\theta)] W(\rho) \rho d\rho = 0 \quad \dots (5)$$

ここから θ に関する同次4階線形常微分方程式が導かれ, 結局

$$T(\theta) = e^{r\theta} (C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta) + e^{-r\theta} (C_3 \cos \theta + C_4 \sin \theta) \dots (6)$$

3. 扇形帯板要素の剛性マトリックス

帯板要素は4つの自由度を持つ。すなわち図-2の $\theta=0$ および $\theta=\pi$ の節線において, それぞれ変位と回転角を生ずる。これらの変数を $\{\delta\}$ として式(3)と式(6)を用いるならば,

$$\{\delta\} = \{N\} \{C\} \dots (7)$$

さらに, 平板のひずみ ϵ

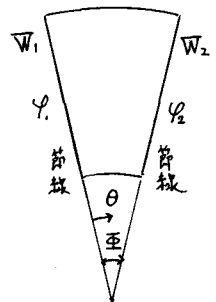


図-2

トリックス $\chi_r, \chi_\theta, \chi_{\theta r}$ および、たかマトリックスをそれぞれ $\{\epsilon\}, \{\sigma\}$ と表すならば、以下の式となる。

$$\{\epsilon\} = \frac{1}{a^2} [B] \{C\} \quad \dots (8)$$

$$\{\sigma\} = D_r [D^*] \{\epsilon\} \quad \dots (9)$$

以上の式によって、要素の全ポテンシャルエネルギーが表現され、最小ポテンシャルエネルギーの原理を適用すると帯板要素の剛性マトリックス $[K]_{nn}$ と、荷重ベクトル $\{F\}_n$ が求められ、次のようになる。

$$[K]_{nn} = \frac{D_r}{a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} [N]_n^T [B]_n^T [D^*] [B]_n [N]_n \rho d\theta d\theta \quad \dots (10)$$

$$\{F\}_n = a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \delta [N]_n^T [L]_n^T \rho d\theta d\theta \quad \dots (11)$$

4. 複リブの剛性マトリックス

本研究に於ては複リブは梁として扱い、その際せん断変形は考慮しなかった。剛性マトリックスは、変位関数に(4)式を用い、最小ポテンシャルエネルギーの原理を適用して導く。

5. 数値計算例

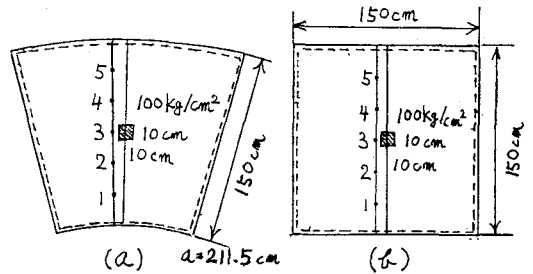
まず図-3(a)に示す、対称軸上に複リブの入った辺比=1の構造に対する解析結果を下表に示す。ただし()内の数値は、図-3(a)の構造に最も近いと思われる図-3(b)の矩形板に対する解析結果である。

表-1

要素数 12 固有値数 8

	M_r $\text{kg}\cdot\text{cm}/\text{cm}$	η_0 $10^3 \text{ kg}\cdot\text{cm}/\text{cm}$
1	0.3310 (0.3331)	0.5579 (0.4922)
2	0.6415 (0.7401)	0.9297 (0.8771)
3	1.150 (1.418)	1.088 (1.079)
4	0.6475 (0.7041)	0.8001 (0.8771)
5	0.3841 (0.3331)	0.4804 (0.4922)

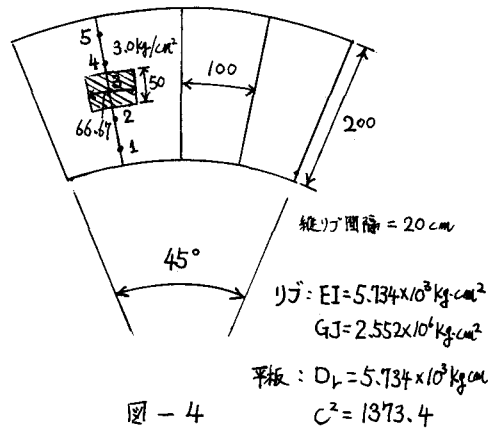
さらに、図-4に示す辺比=2の構造の解析結果を表-2に示す。()内は、先の例と同様に仮想された矩形板に対する解析結果である。



リブ: $EI = 1.62 \times 10^9 \text{ kg}\cdot\text{cm}^2$

平板: $D_r = 6.302 \times 10^3 \text{ kg}/\text{cm}^3, C^2 = 1070.77$

図-3



複リブ間隔 = 20 cm

リブ: $EI = 5.734 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{cm}^2$

$GJ = 2.552 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{cm}^2$

平板: $D_r = 5.734 \times 10^3 \text{ kg}/\text{cm}^3$

$C^2 = 1373.4$

図-4

表-2

帯板数 12 固有値数 8

	変位 cm	複リブ 曲げモーメント $10^4 \text{ kg}\cdot\text{cm}$
1	0.742 (0.775)	-0.509 (0.521)
2	1.961 (2.047)	0.437 (0.982)
3	2.440 (2.546)	0.317 (0.545)
4	1.961 (2.047)	1.272 (0.982)
5	0.742 (0.775)	0.742 (0.521)

6. 結論

本解析法は、補剛された曲線床版に対して十分な有効性を持つ。

7. 文献

- 1) 写村 仁 「曲線直交異方性扇形平板の曲げについて」 土木学会論文集第82号、1976