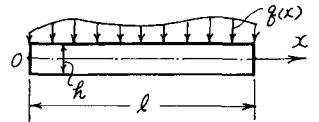


山梨大学工学部 平島健一
和歌山県庁 鉛口訓史

1. 緒言 本研究は圧縮域と引張域と異なる弾性挙動とする、いわゆる複弾性係数の矩形断面梁を対象とし、各種の荷重、境界条件の下での静力学的挙動について数値解析を実行したものである。従来、この種の複弾性係数と有する梁の解析には Bernoulli-Euler の仮定を用いた古典的な梁理論が使用されてきたが、最近 Bercuらにより Timoshenko 梁理論に基づいた解析がなされた。ここでは梁の上下表面での境界条件と完全に満足する Levinson 梁理論²⁾を用いて課題の問題を取り上げ、遷移行列法により数値解析を実行し、上述の諸理論の結果との比較考察を行なってみたものである。

2. 支配方程式 Fig. 1 に示すような梁について考える。Levinson の梁理論と複弾性係数をもつ梁に適用するものを示せば、変位は次式で与えられる。



$$U(x, z) = u(x) + z\psi(x) + z^3\phi(x), \quad W(x, z) = w(x), \quad \dots \quad (1)$$

ここに、 U, W はそれぞれ x, z 方向の変位の組であり、 u, w は梁の中央面 ($z=0$) での x, z 方向の変位、 $\psi(x)$ は中央面での曲げ勾配、 $\phi(x)$ は外荷重としてせん断力の作用がない場合を考えたとき、梁の上下表面でせん断力 Y_{xz} が零となるという境界条件より、 $\phi(x)$ は次のように求められる。

$$Y_{xz}|_{z=\pm h/2} = (\partial U / \partial z + \partial W / \partial x)|_{z=\pm h/2} = 0. \quad \therefore \phi(x) = -\frac{4}{3h^2} \cdot \psi(x) + w_{,x} \quad \dots \quad (2)$$

ここに、 $(\cdot)_{,x}$ は x に関する微分を表す。変位式 (1) から軸力 N 、曲げモーメント M およびせん断力 Q が求まり、その結果を行列表示する次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & (\frac{c}{s} - \frac{vk^2}{2}) \\ b & d & (\frac{c}{s} + \frac{vk^2}{10}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ \psi_{,x} \\ g(x) \end{Bmatrix}, \quad Q = s(w_{,x} + \psi), \quad \dots \quad (3)$$

ここに、 $g(x)$ は梁の上表面に作用する鉛直荷重、 v はポアソン比であり、 k は梁の高さ方向の直応力 σ_z と考慮した σ により導入されたものである。また係数 $a, b, \dots$ は梁の剛度に関する量で次式により定義される。

$$(a, b, d) = \int_{-h/2}^{h/2} E^*(1, z, z^2) dz, \quad (c, e) = \frac{4}{3h^2} \int_{-h/2}^{h/2} E^*(z^3, z^4) dz, \quad s = \int_{-h/2}^{h/2} G dz = \frac{4}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} G z^2 dz, \quad \dots \quad (4)$$

上式中の E^*, G は、それぞれ弾性係数、せん断弾性係数であり、上添字 h は引張域では $h=c$ 、圧縮域では $h=c$ とする。断面力に関する釣合方程式は次式で与えられる。

$$N_{,x} = 0, \quad Q_{,x} = -g(x), \quad M_{,x} = Q, \quad \dots \quad (5)$$

式 (5) に式 (3) を代入すれば、支配方程式として次式が求められる。

$$\{a u_{,x} + b \psi_{,x} + (\frac{c}{s} - \frac{vk^2}{2}) g(x)\}_{,x} = 0, \quad s(w_{,xx} + \psi_{,x}) = -g(x), \quad \{b u_{,x} + d \psi_{,x} + (\frac{c}{s} + \frac{vk^2}{10}) g(x)\}_{,x} - s(w_{,x} + \psi) = 0, \quad \dots \quad (6)$$

また、中立面位置 z_n は軸方向ひずみ ϵ_x が零になる z であるから、次のように表わされる。

$$\epsilon_x = u_{,x} + z_n \psi_{,x} + \frac{4g(x)}{3h^2 s} z_n^3 = 0 \quad \dots \quad (7)$$

なお、上式中の $u_{,x}, \psi_{,x}$ は式 (4) より次式のように求められる。

$$u_{,x} = -\frac{1}{b^2 - ad} \left[dN - bM + \left\{ \frac{be - cd}{s} + \frac{vk^2(bd + sd)}{10} \right\} g(x) \right], \quad \psi_{,x} = \frac{1}{b^2 - ad} \left[bN - dM + \left\{ \frac{ac - bc}{s} + \frac{vk^2(ad + sb)}{10} \right\} g(x) \right], \quad \dots \quad (8)$$

式 (8) と式 (7) に代入整理すると、 z_n に関する代数方程式が得られ、これを解いて中立面位置 z_n が定まる。しかし、この代数方程式には曲げモーメント M が含まれることから中立面位置 z_n は梁の長さ方向に沿って変化するようになる。また梁の剛度 $a, b, \dots$ も変化するようになるので、支配方程式の解析解を求めることは一般に困難であるので、ここでは遷移行列法を用いて近似的な解を求めることにした。

3. 数値結果と考察 計算に用いた梁の力学的性質と Table 1 に、また Table 2 に境界条件、荷重条件と

示す。なお、逐移行列法を用いるにあたって、Table 1. 梁の力学的性質

弾性係数: $E = 3.635 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$
 $E^* = 1.218 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$
 数 ($E = 2.98 \times 10^7 \text{ psi}$, $G = 1.24 \times 10^7 \text{ psi}$) の梁のため
 せん断弾性係数:
 $G^* = G = 37.56 \text{ kg/cm}^2$

密度: $\rho = 1.075 \text{ gr/cm}^3$

梁の長さ: $l = 20.0 \text{ cm}$

梁の幅: $b_0 = 2.5 \text{ cm}$

梁の厚さ: $h = 1.5 \text{ cm}, 3.0 \text{ cm}, 6.0 \text{ cm}$

Fig. 3 は Case 1 の場合で、複弾性係数 $E = \sqrt{E^* E}$

を用いて、たわみと無次元化して表示したものである。

h/l の値が小さくなるにつれて、それと

古典理論の差異が顕著になり、特に Levinson 理

論は他らに比べて h/l の変化にかなり敏感であるこ

とを示している。Fig. 4a~c は Case 1, 3, 4

の場合の中立面位置と比較したものである。

Timoshenko 理論、古典理論では軸力 N が零の梁

の場合、一定となるが、Levinson 理論では複雑

に変化している。なお、ここには示さなかった

Case 5 の場合は $N \neq 0$ であるので Timoshenko 理

論 Fig. 2 単弾性係数の梁のたわみ

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

Table 2 梁の境界条件と荷重状態

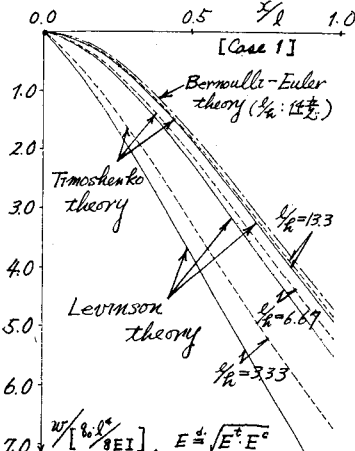


Fig. 3 複弾性係数と有する梁(Case 1)の各理論によるたわみの比較

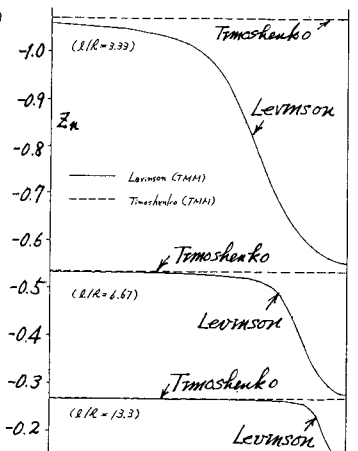


Fig. 4a 複弾性係数と有する梁の中立面位置の比較

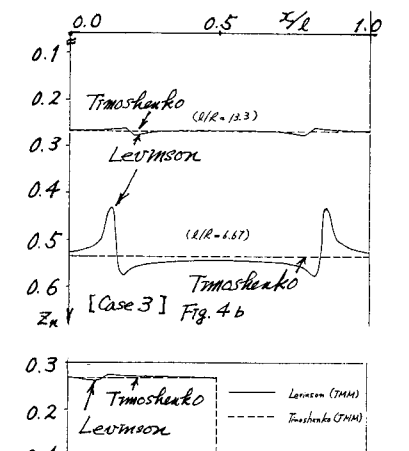


Fig. 4b 複弾性係数と有する梁の中立面位置の比較

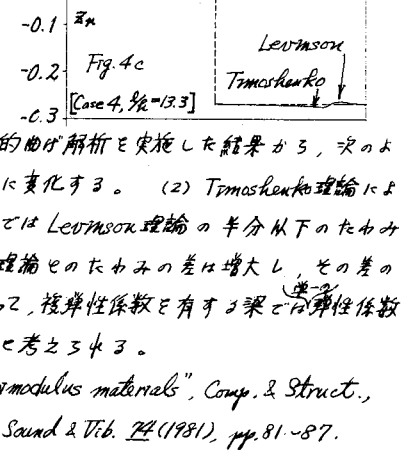


Fig. 4c 複弾性係数と有する梁の中立面位置の比較

論の場合でも中立面位置は変化することになる。

4. 結言 複弾性係数と有する梁に Levinson 理論と適用して、静的曲げ解析を実施した結果から、次のことが明らかになった。(1) 中立面位置は Levinson 理論では複雑に変化する。(2) Timoshenko 理論によるたわみは Levinson 理論よりも数%~数十% 小さく、また古典理論では Levinson 理論の半分以下のたわみとなることもある。(3) h/l が小さくなるほど、Levinson 理論と他の理論とのたわみの差は増大し、その差の比率は単一の弾性係数の梁に対するものよりも大きくはる。したがって、複弾性係数と有する梁の弾性係数のものに対して、(より)高次の梁理論を用いて解析することが必要であると考へておこす。

参考文献: 1) Tran, A.D. & Bert, C.W.: "Bending of thick beams of bimodulus materials", Comp. & Struct., 15(1982), pp. 627-642. 2) Levinson, M.: "A new rectangular beam theory", J. Sound & Vib. 74(1981), pp. 81-87.